

RECHERCHE DES MOMENTS D'INERTIE AXIAUX DU SUPPORT EN PILOTIS D'UN RÉSERVOIR SURÉLEVÉ

SEARCH FOR AXIAL INERTIA MOMENTS OF THE SUPPORT OF AN ELEVATED TANK WITH FRAME STAGING

Hocine HAMMOUM, Karima BOUZELHA, Linda TABELLOUT

Département de génie civil, Université Mouloud Mammeri, 15000 Tizi Ouzou, Algérie

E-mail : hammoum_hoc@yahoo.fr

PRÉLIMINAIRE

Dans notre précédent article paru dans les *Annales du BTP* (Volume N° 2, 2016), nous nous sommes intéressés à l'analyse au séisme d'un réservoir surélevé en béton armé et comme cas pratique, nous avons traité un exemple de cuve reposant sur une tour. Comme le support est un fût, le calcul du moment d'inertie axial est tout simplement ramené à celui d'une section annulaire calculé par rapport à un axe passant par le centre de gravité de la section du support.

En revanche, dans le cas d'un support en pilotis, composé de plusieurs poteaux de forme rectangulaires disposés en forme d'étoile, l'évaluation de ce moment d'inertie axial n'est pas aussi évidente. C'est pour cette raison qu'un nouvel examen de ce problème nous a semblé répondre à une certaine nécessité pratique.

Nous développons, dans la contribution que nous soumettons ici, une méthode de calcul des moments d'inertie du support d'un réservoir surélevé, posé sur un contreventement en pilotis. Cette méthode est qualifiée d'analytique et est inspirée des relations de base de la résistance des matériaux ayant trait à l'analyse des caractéristiques des sections planes. Pour le lecteur amateur des solutions graphiques, celui-ci trouvera dans la seconde partie de l'article, une approche pour l'évaluation des moments d'inertie axiaux par rapport aux axes du repère global du support, inspirée du cercle des inerties, aussi appelé

cercle de Mohr. Le lecteur trouvera même un calcul pratique qui illustre bien la méthode de calcul exposée.

Le travail que nous présentons dans cette contribution, à l'instar de nos précédents articles publiés dans les *Annales du BTP*, s'inscrit clairement dans un environnement pratique de la profession de l'ingénieur civil, par le fait qu'elle a un caractère applicatif au stade de leur conception en bureau d'études.

CONTEXTE DE L'ÉTUDE

La demande sans cesse croissante des besoins en eau potable des populations et besoins industriels atteste de l'intérêt que représentent les ouvrages de stockage dans la mobilisation de la ressource hydraulique. Cet intérêt passe par la réalisation d'ouvrages de génie civil fiables et sûrs, tout en évitant les fuites et les gaspillages, particulièrement dans les pays chauds comme l'Algérie. Du fait que nous réalisons de plus en plus d'ouvrages de stockage de grande capacité pour les grands pôles urbains, il est devenu impératif de maîtriser leur stabilité et leur comportement vis-à-vis du risque sismique. Or l'analyse des pathologies rencontrées, à la suite du dernier séisme dévastateur de Boumerdes (2003), a montré un manque flagrant dans le comportement sismique des réservoirs surélevés mettant en évidence l'importance de l'analyse parasismique. Cette dernière analyse doit considérer la rigidité flexionnelle du support du

réservoir surélevé qui passe inévitablement par l'évaluation exacte de son moment d'inertie.

C'est dans cet esprit que nous développons, dans la présente contribution, une méthode de calcul du moment d'inertie d'un support en pilotis. Deux solutions sont proposées, l'une analytique inspirée des relations de base de la RDM, l'autre graphique inspirée du cercle de Mohr. Cette contribution s'inscrit clairement dans un environnement pratique de la profession de l'ingénieur civil, par le fait qu'elle a un caractère applicatif au stade de la conception en bureau d'études des ouvrages de stockage surélevés.

Nous avons choisi de publier cet article dans les Annales du Bâtiment et des Travaux Publics pour l'originalité de cette approche, car nous sommes convaincus que cela enrichira le contenu bibliographique de la revue. Les Annales du BTP ont depuis une soixantaine d'années consacrées plusieurs articles aux réservoirs, dont le premier remonte à 1959. Il fût publié par Hangan et Soare et présenta un calcul rapide des réservoirs cylindriques basé sur la théorie des plaques et coques. On n'oubliera pas de mentionner le papier de Davidovici et Haddadi (1981) qui reste probablement l'article des Annales du BTP le plus utilisé jusqu'à nos jours par les ingénieurs de la pratique, car il a largement répondu à la problématique de la réponse sismique des réservoirs de stockage de liquides. Même le Fascicule 74 renvoie les projeteurs à consulter cet article pour la justification de la tenue au séisme des réservoirs sous l'effet hydrodynamique. En 1996, la revue consacra même un numéro spécial coordonné par Mathieu dans le cadre de la mise à jour du Fascicule 74, traitant de la pathologie et réparation des ouvrages en béton de stockage et de transport des liquides. En 1995, Layrangues présentera un calcul précis des réservoirs cylindriques tenant compte de l'interaction entre les différents éléments résistants de l'ouvrage. Suivra en 2003, un autre article de Mathieu consacré à la méthodologie d'évaluation des ouvrages hydrauliques en béton appliquée à un patrimoine.

Quant au travail que nous présentons dans cette contribution, il constitue la suite logique de nos précédents articles publiés dans les Annales du BTP (2010, 2012, 2013, 2015, 2016), et donne un aperçu de notre activité de recherche. Cette dernière tend, par les propositions très pratiques qu'elle suggère, à répondre aux préoccupations de notre monde contemporain, notamment sur l'analyse de risque dans le domaine du génie civil.

1. INTRODUCTION

La cuve de stockage d'un réservoir surélevé est posée au sommet d'un support pouvant être une tour ou un pilotis. Dans les études d'ingénierie, l'ingénieur concepteur est toujours tenu d'analyser le comportement de cet ouvrage face au séisme [4,6] en considérant la rigidité flexionnelle (EI) de son système de contreventement (le support). Cette analyse passe inévitablement par l'évaluation du moment d'inertie du support par rapport aux axes passant par son centre de gravité (repère global OYZ sur la Figure 1).

Lorsque le support de la cuve est une tour ; le calcul du moment d'inertie axial est tout simplement ramené à celui d'une section annulaire (section transversale du fût du support) par rapport à un axe passant par le centre de gravité de la section du support. Ce cas simple a déjà été traité dans notre dernière contribution

[5]. A l'inverse, lorsque la cuve est posée sur un support en pilotis, composé de plusieurs poteaux de forme rectangulaire disposés en forme d'étoile (Figure 1), l'évaluation de la rigidité flexionnelle n'est pas aussi évidente.

Traditionnellement, et à travers la majorité des études menées au niveau des bureaux d'études techniques, les moments d'inertie axiaux de chaque poteau, constituant le support, sont déterminés en considérant dans un premier temps les moments d'inertie axiaux par rapport aux axes passant par le centre de gravité du dit poteau (Repère Gyz de la Figure 2). Dans un second temps, une translation d'axes est nécessaire pour déduire les moments d'inertie axiaux par rapport aux axes passant par le centre de gravité de l'ouvrage (Repère Oy, z_1 de la Figure 2). Cependant la rotation d'axe du poteau d'un angle α pour déduire les moments d'inertie axiaux par rapport aux axes du repère global OYZ (Figure 2) est très souvent négligée tant les calculs qui en découlent sont longs et fastidieux lorsqu'ils ne sont pas méconnus par les ingénieurs civils de bureaux d'études. Cette manière de faire conduit généralement à une surestimation de la rigidité flexionnelle du support, et par voie de conséquence à un manque de robustesse de la structure.

C'est pour cette raison qu'un nouvel examen de ce problème nous a semblé répondre à une certaine nécessité pratique. Comme la plupart des problèmes de l'ingénieur, l'évaluation des moments d'inertie du support d'un réservoir surélevé peut être abordée suivant deux points de vue différents.

La première approche est le calcul analytique. Certes, il apparaîtra un peu suranné, étant donné que la notion de moment d'inertie est intervenue pour la première fois d'une manière officielle et systématique au début du 19^e siècle (1811) [3], mais chemin faisant et en partant avec des notions simples, nous verrons qu'elles pourront être transportées à un problème plus neuf et d'actualité.

La seconde approche est la construction graphique qui est la façon la plus simple de prendre le problème en charge, à condition de connaître le principe du tracé du cercle de Mohr qui remonte aussi à la fin du 19^e siècle (1880) [2]. En ce temps-là, et même jusqu'à un passé très récent, avant l'avènement des ordinateurs, ces méthodes graphiques élégantes et très concrètes permettaient de mener à bien la résolution des problèmes de moment d'inertie en ingénierie.

La recherche d'une solution analytique à ce problème, nous a amené à présenter la contribution faisant l'objet de la présente étude. Avec une approche, s'appuyant sur les notions de base des caractéristiques géométriques des sections planes, nous arrivons à tirer les relations qui permettent d'évaluer les moments d'inertie axiaux par rapport aux axes du repère global, que nous présentons plus loin en section 3. Et pour parer à une certaine lourdeur des calculs analytiques, une solution graphique plus rapide est imaginée sur le cercle des inerties (ou de Mohr). Le principe général de cette approche réside dans la transposition du procédé analytique, traditionnellement utilisé. Cette méthode nous permet d'aboutir d'une manière satisfaisante et relativement simple à une solution générale du problème, qui à première vue paraît des plus compliqué.

Bien qu'un nombre important d'études ait été menés sur les réservoirs, à notre connaissance, aucune ne traite de l'évaluation des moments d'inertie principaux d'un support en pilotis d'un réservoir surélevé, d'une manière explicite, comme nous le faisons dans cette contribution.

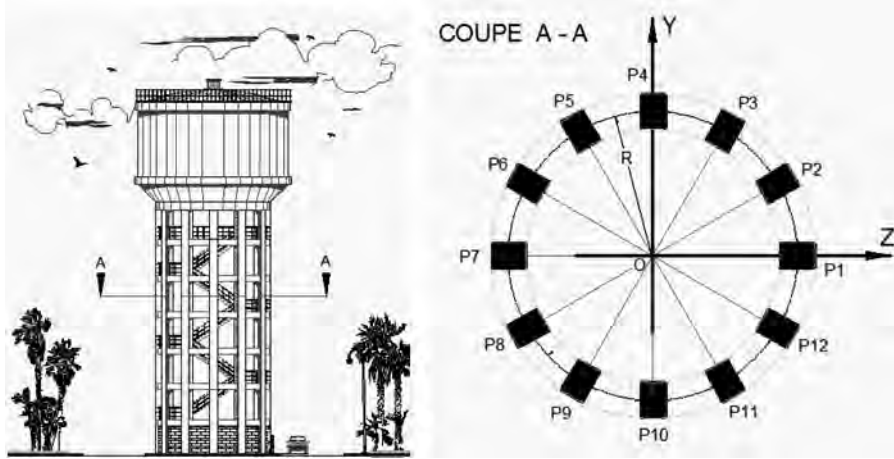


Figure 1 : Coupe transversale d'un support en pilotis d'un réservoir surélevé dans son repère global OYZ

2. POSITION DU PROBLÈME

Considérons un réservoir surélevé posé sur un support en pilotis composé de n poteaux ($n=4, 6, 8, 10, 12 \dots$) tous disposés en étoile autour d'un cercle de rayon R , comme présenté dans la Figure 1. Nous cherchons à déterminer le moment d'inertie du système de contreventement en pilotis par rapport aux axes OY et OZ du repère global de la structure. Les poteaux présentent les mêmes caractéristiques géométriques sur toute la hauteur développée du support, c'est-à-dire que le support est à inertie constante. La dimension d'un poteau rectangulaire est b en largeur et h en longueur.

3. MÉTHODE DE RÉOLUTION ANALYTIQUE

3.1. Moments d'inertie axiaux I_z^i, I_y^i d'un poteau par rapport aux axes Gz et Gy

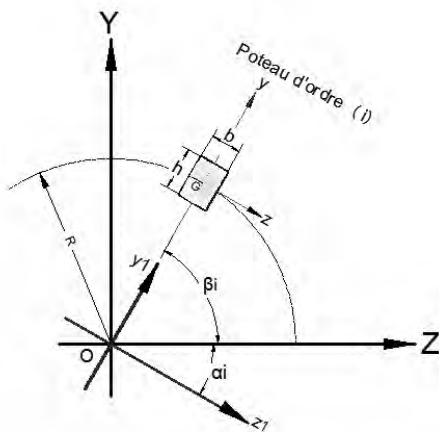


Figure 2 : Représentation d'un poteau d'ordre (i) dans les différents repères

Le moment d'inertie d'un poteau rectangulaire d'ordre (i) par rapport à l'axe Gz passant par son centre de gravité est donné par :

$$I_z^i = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (1)$$

Le moment d'inertie d'un poteau rectangulaire d'ordre (i) par rapport à l'axe Gy passant par son centre de gravité est donné par :

$$I_y^i = \frac{h \cdot b^3}{12} \quad (2)$$

Le produit d'inertie d'un poteau rectangulaire d'ordre (i) par rapport aux axes Gz et Gy passant par son centre de gravité est nul :

$$I_{yz}^i = 0 \quad (3)$$

3.2. Moment d'inertie I_{z1}^i, I_{y1}^i d'un poteau par rapport aux axes Oz₁, Oy₁

Les axes (Oz₁ et Oy₁) se déduisent des axes (Gz et Gy) par une translation (Figure 2). Les moments d'inertie axiaux (I_{z1}^i et I_{y1}^i) ainsi que produit d'inertie I_{y1z1}^i sont évalués par le théorème de Huygens.

Le moment d'inertie d'un poteau rectangulaire d'ordre (i) par rapport à l'axe Oz₁ passant par le centre du repère global O de la structure est donné par :

$$I_{z1}^i = I_z^i + R^2 \cdot (b \cdot h) \quad (4)$$

Le moment d'inertie d'un poteau rectangulaire d'ordre (i) par rapport à l'axe Oy₁ passant par le centre du repère global O de la structure est donné par :

$$I_{y1}^i = I_y^i \quad (5)$$

Le produit d'inertie d'un poteau rectangulaire d'ordre (i) par rapport aux axes Oz₁ et Oy₁ passant par le centre du repère global O de la structure est donné par :

$$I_{y1z1}^i = I_{yz}^i = 0 \quad (6)$$

3.3. Moments d'inertie axiaux I_z^i et I_y^i d'un poteau par rapport aux axes OZ et OY

Les axes (OZ et OY) se déduisent des axes (Oz₁ et Oy₁) par une rotation d'angle α_i de l'axe Oz₁ par rapport à l'axe OZ (Figure 3).

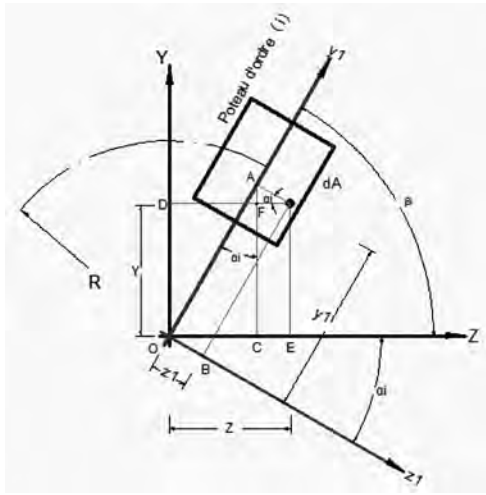


Figure 3 : Déduction des axes (OZ et OY) par la rotation des axes (Oz₁ et OY₁) d'un angle α_i

Le moment d'inertie I_Z^i d'un poteau d'ordre (i) par rapport à l'axe OZ est donné par l'expression suivante [7] :

$$I_Z^i = \int_A Y^2 \cdot dA \quad (7)$$

D'après la Figure 3, nous pouvons déduire que :

$$AC = OA \cdot \cos(\alpha_i) = y_1 \cdot \cos(\alpha_i) \quad (8)$$

$$AF = OB \cdot \sin(\alpha_i) = z_1 \cdot \sin(\alpha_i) \quad (9)$$

Nous pouvons alors écrire que :

$$Y = OD = AC - AF = y_1 \cdot \cos(\alpha_i) - z_1 \cdot \sin(\alpha_i) \quad (10)$$

Il vient :

$$I_Z^i = \int_A [y_1 \cdot \cos(\alpha_i) - z_1 \cdot \sin(\alpha_i)]^2 \cdot dA \quad (11)$$

$$I_Z^i = \int_A [y_1 \cdot \cos(\alpha_i)]^2 \cdot dA + \int_A [z_1 \cdot \sin(\alpha_i)]^2 \cdot dA - 2 \cdot \int_A y_1 \cdot z_1 \cdot \cos(\alpha_i) \cdot \sin(\alpha_i) \cdot dA \quad (12)$$

$$I_Z^i = I_{z1}^i \cdot \cos^2(\alpha_i) + I_{y1}^i \cdot \sin^2(\alpha_i) - 2 \cdot I_{y1z1}^i \cdot \cos(\alpha_i) \cdot \sin(\alpha_i) \quad (13)$$

Etant donné que :

$$\cos^2(\alpha_i) = \frac{1 + \cos(2\alpha_i)}{2} \quad (14)$$

$$\sin^2(\alpha_i) = \frac{1 - \cos(2\alpha_i)}{2} \quad (15)$$

$$\sin(2\alpha_i) = 2 \cdot \cos(\alpha_i) \cdot \sin(\alpha_i) \quad (16)$$

Nous obtenons en définitif :

$$I_Z^i = \frac{I_{z1}^i + I_{y1}^i}{2} + \frac{I_{z1}^i - I_{y1}^i}{2} \cdot \cos(2\alpha_i) - I_{y1z1}^i \cdot \sin(2\alpha_i) \quad (17)$$

Le moment d'inertie I_Y^i d'un poteau d'ordre (i) par rapport à l'axe OY est donné par l'expression suivante [7] :

$$I_Y^i = \int_A Z^2 \cdot dA \quad (18)$$

D'après la Figure 3, nous pouvons déduire que :

$$OC = OA \cdot \sin(\alpha_i) = y_1 \cdot \sin(\alpha_i) \quad (19)$$

$$CE = OB \cdot \cos(\alpha_i) = z_1 \cdot \cos(\alpha_i) \quad (20)$$

Nous pouvons alors écrire que :

$$Z = OE = OC + CE = y_1 \cdot \sin(\alpha_i) + z_1 \cdot \cos(\alpha_i) \quad (21)$$

Il vient :

$$I_Y^i = \int_A [y_1 \cdot \sin(\alpha_i) + z_1 \cdot \cos(\alpha_i)]^2 \cdot dA \quad (22)$$

$$I_Y^i = \int_A [y_1 \cdot \sin(\alpha_i)]^2 \cdot dA + \int_A [z_1 \cdot \cos(\alpha_i)]^2 \cdot dA + 2 \cdot \int_A y_1 \cdot z_1 \cdot \cos(\alpha_i) \cdot \sin(\alpha_i) \cdot dA \quad (23)$$

$$I_Y^i = I_{z1}^i \cdot \sin^2(\alpha_i) + I_{y1}^i \cdot \cos^2(\alpha_i) + 2 \cdot I_{y1z1}^i \cdot \cos(\alpha_i) \cdot \sin(\alpha_i) \quad (24)$$

Nous obtenons en définitif :

$$I_Y^i = \frac{I_{z1}^i + I_{y1}^i}{2} - \frac{I_{z1}^i - I_{y1}^i}{2} \cdot \cos(2\alpha_i) + I_{y1z1}^i \cdot \sin(2\alpha_i) \quad (25)$$

Le produit d'inertie I_{YZ}^i d'un poteau d'ordre (i) par rapport aux axes OY et OZ est donné par l'expression suivante [7] :

$$I_{YZ}^i = \int_A Y \cdot Z \cdot dA \quad (26)$$

Il vient :

$$I_{YZ}^i = \int_A [y_1 \cdot \cos(\alpha_i) - z_1 \cdot \sin(\alpha_i)] \cdot [y_1 \cdot \sin(\alpha_i) + z_1 \cdot \cos(\alpha_i)] \cdot dA \quad (27)$$

$$I_{YZ}^i = (I_{z1}^i - I_{y1}^i) \cdot \cos(\alpha_i) \cdot \sin(\alpha_i) + I_{z1y1}^i \cdot (\cos^2(\alpha_i) - \sin^2(\alpha_i)) \quad (28)$$

Nous obtenons en définitif :

$$I_{YZ}^i = \frac{I_{z1}^i - I_{y1}^i}{2} \cdot \sin(2\alpha_i) + I_{z1y1}^i \cdot \cos(2\alpha_i) \quad (29)$$

Un examen attentif des équations (17, 25 et 29) révèle que celles-ci sont des équations paramétriques qui varient en fonction de l'angle α_i . Nous pouvons alors correspondre à toute valeur de α_i , une valeur de I_Z^i , de I_Y^i et de I_{YZ}^i .

3.4. Moments d'inertie axiaux I_Z et I_Y du support par rapport aux axes OZ et OY

Le moment d'inertie du système de contreventement en pilotis par rapport à l'axe OZ est donné par la relation suivante :

$$I_Z = \sum_{i=1}^n I_Z^i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{I_{z1}^i + I_{y1}^i}{2} + \frac{I_{z1}^i - I_{y1}^i}{2} \cdot \cos(2\alpha_i) - I_{y1z1}^i \cdot \sin(2\alpha_i) \right] \quad (30)$$

Le moment d'inertie du système de contreventement en pilotis par rapport à l'axe OY est donné par la relation suivante :

$$I_Y = \sum_{i=1}^n I_Y^i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{I_{z1}^i + I_{y1}^i}{2} - \frac{I_{z1}^i - I_{y1}^i}{2} \cdot \cos(2\alpha_i) + I_{y1z1}^i \cdot \sin(2\alpha_i) \right] \quad (31)$$

Le produit d'inertie du système de contreventement en pilotis par rapport aux axes OZ et OY est donné par la relation suivante :

$$I_{YZ} = \sum_{i=1}^n I_{YZ}^i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{I_{z1}^i - I_{y1}^i}{2} \cdot \sin(2\alpha_i) + I_{y1z1}^i \cdot \cos(2\alpha_i) \right] \quad (32)$$

4. MÉTHODE DE RÉOLUTION GRAPHIQUE

L'équation (17) peut se mettre sous la forme :

$$\left[I_Z^i - \frac{I_{z1}^i + I_{y1}^i}{2} \right]^2 = \left[\frac{I_{z1}^i - I_{y1}^i}{2} \cdot \cos(2\alpha_i) - I_{y1z1}^i \cdot \sin(2\alpha_i) \right]^2 \quad (33)$$

L'équation (29) peut se mettre sous la forme :

$$\left[I_{YZ}^i - 0 \right]^2 = \left[\frac{I_{z1}^i - I_{y1}^i}{2} \cdot \sin(2\alpha_i) + I_{y1z1}^i \cdot \cos(2\alpha_i) \right]^2 \quad (34)$$

En additionnant les relations (33) et (34), il vient :

$$\left[I_Z^i - \frac{I_{z1}^i + I_{y1}^i}{2} \right]^2 + \left[I_{YZ}^i - 0 \right]^2 = \left[\frac{I_{z1}^i - I_{y1}^i}{2} \right]^2 + \left[I_{y1z1}^i \right]^2 \quad (35)$$

Cette dernière équation nous rappelle l'équation d'un cercle (Figure 4) de rayon R dont le centre C a pour coordonnées (X_0, Y_0) qui s'écrit sous la forme :

$$[Y - Y_0]^2 + [X - X_0]^2 = R^2 \quad (36)$$

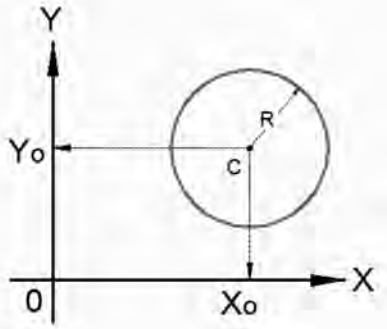


Figure 4. Représentation d'un cercle de centre C (X_0, Y_0) et de rayon R

Par analogie avec l'équation (36), nous déduisons que l'équation (35) représente l'équation d'un cercle des inerties que nous pouvons représenter sur un repère orthogonal (OI_Z, OI_{YZ}) . Le centre du cercle des inerties, que nous noterons C, aura pour coordonnées $\left(\frac{I_{z1}^i + I_{y1}^i}{2}, 0 \right)$, c'est-à-dire qu'il sera centré en

un point C sur l'axe OI_Z et son rayon sera égal à

$$R = \sqrt{\left[\frac{I_{z1}^i - I_{y1}^i}{2} \right]^2 + \left[I_{y1z1}^i \right]^2}$$

Etant donné que chaque poteau d'ordre (i) du système de contreventement en pilotis peut être repéré par un angle α_i dans le repère global du support OYZ (voir Figure 2), ses moments d'inertie peuvent être déduits directement à partir du cercle des inerties, d'une manière simple et rapide, en suivant une procédure de construction graphique, que nous développerons dans la section (4.2).

4.1. Détermination de la valeur de α_i pour laquelle I_Z^i prend des valeurs extrêmes (I_Z^{\max} et I_Z^{\min})

Nous savons que le moment d'inertie axial I_Z^i (ou I_Y^i) passera par un extremum pour toute valeur de α_i annulant sa dérivée première. Nous pouvons alors écrire :

$$\frac{dI_Z^i}{d\alpha_i} = - \left(I_{z1}^i - I_{y1}^i \right) \cdot \sin(2\alpha_i) - 2I_{y1z1}^i \cdot \cos(2\alpha_i) = -2 \left[I_{YZ}^i \right] = 0 \quad (37)$$

Nous concluons que I_Z^i et I_Y^i prennent des valeurs extrêmes lorsque le produit d'inertie I_{YZ}^i est nul.

$$I_{YZ}^i = \frac{I_{z1}^i - I_{y1}^i}{2} \cdot \sin(2\alpha_i) + I_{y1z1}^i \cdot \cos(2\alpha_i) = 0 \quad (38)$$

Il vient alors :

$$\text{tg}(2\alpha_i) = - \frac{2I_{y1z1}^i}{I_{z1}^i - I_{y1}^i} = 0 \quad (39)$$

Nous déduisons que I_Z^i prend des valeurs extrêmes pour toute valeur de $\alpha_i = 0 + k \cdot \frac{\pi}{2}$, où k est un entier naturel.

Cherchons à déterminer la valeur de I_Z^i , pour la valeur particulière de $k=0$, donnant $\alpha_i = 0$, correspondant à l'inertie axiale du poteau N° 4 (Figure 1).

$$I_Z^4 = \frac{I_{z1}^4 + I_{y1}^4}{2} + \frac{I_{z1}^4 - I_{y1}^4}{2} \cdot \cos(2\alpha_4) - I_{y1z1}^4 \cdot \sin(2\alpha_4) = I_{z1}^4 = I_Z^{\max} \quad (40)$$

Cherchons à déterminer la valeur de I_Z^i , pour la valeur particulière de $k=1$, donnant $\alpha_i = \frac{\pi}{2}$, correspondant à l'inertie axiale du poteau N° 1 (Figure 1).

$$I_Z^1 = \frac{I_{z1}^1 + I_{y1}^1}{2} + \frac{I_{z1}^1 - I_{y1}^1}{2} \cdot \cos(2\alpha_1) - I_{y1z1}^1 \cdot \sin(2\alpha_1) = I_{y1}^1 = I_Z^{\min} \quad (41)$$

Nous concluons que le cercle des inerties passera par une valeur maximale ($I_Z^{\max} = I_{z1}^4$) correspondant au moment d'inertie du poteau 4 (Figure 2) ainsi que par une valeur minimale ($I_Z^{\min} = I_{y1}^1$) correspondant au moment d'inertie du poteau 1.

4.2. Procédure de construction du cercle des inerties des poteaux du support en pilotis

La représentation géométrique des moments d'inertie, donnée dans la Figure 5, par la méthode graphique du cercle de Mohr se fait en plusieurs étapes qui peuvent se résumer comme suit :

- Tracer les axes orthogonaux OI_Z et OI_{YZ} .
- Evaluer analytiquement les moments d'inertie axiaux (I_{z1}^1, I_{y1}^1) et produit d'inertie I_{y1z1}^1 du poteau 1 correspondant à l'angle ($\alpha_1 = 90^\circ$).
- Par la relation (41), déduire que $I_Z^1 = I_{y1}^1 = I_Z^{\min}$ et $I_{YZ}^1 = 0$.

- Localiser le point P_1 , représentatif du poteau 1, de coordonnées $(I_{z1}^1, 0)$ sur l'axe OI_z des abscisses.
- Localiser le point C de coordonnées $\left(\frac{I_{z1}^1 + I_{y1}^1}{2}, 0\right)$

désignant le centre du cercle des inerties sur l'axe OI_z des abscisses.

- Tracer le cercle de Mohr de centre C, de rayon et passant par le point P_1 .

$$R=\sqrt{\left[\frac{I_{z1}^1-I_{y1}^1}{2}\right]^2 + \left[I_{y1z1}^1\right]^2}$$

- A partir de cette étape, nous pouvons déduire les moments d'inertie axiaux de n'importe quel poteau du support de contreventement noté P_i d'ordre (i) dont l'axe Oz_i forme un angle α_i avec l'axe OZ . Lorsque l'axe Oz_i du poteau d'ordre (i) fait un angle α_i avec l'axe OZ dans la réalité, il parcourt le double (soit donc $2\alpha_i$) sur le cercle des inerties.

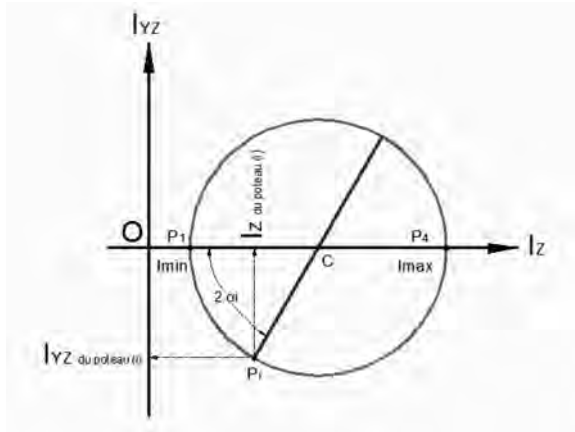


Figure 5. Construction du cercle des inerties

5. APPLICATION PRATIQUE

Comme application pratique, et pour illustrer la méthode de calcul exposée en section 3, nous analysons un château d'eau de capacité 1000 m³ posé sur un support en pilotis (Figure 6), implanté dans la ville d'El Meneaa (Ghardaia, Algérie) [1]. Les caractéristiques géométriques du réservoir sont résumées dans le tableau 1.

5.1. Calcul analytique

Les moments d'inertie axiaux (I_z^i et I_y^i) de chaque poteau rectangulaire P_i d'ordre (i), repéré par son angle α_i (ou β_i) (Figure 2), sont donnés par les relations (1 à 3). Les moments d'inertie axiaux (I_{z1}^1 et I_{y1}^1) de chaque poteau rectangulaire P_i sont donnés par les relations (4 à 5). Enfin les moments d'inertie axiaux (I_z^i , I_y^i) et le produit d'inertie I_{yz}^i de chaque poteau rectangulaire P_i sont donnés par les relations (17, 24 et 29). Nous avons consigné tous les résultats du calcul analytique effectué pour chaque poteau du support en pilotis en fonction de son angle α_i (ou β_i) dans le tableau 2 qui suit.

Nous constatons que le produit d'inertie du système de contreventement I_{yz} est nul. Nous déduisons que les axes OZ et OY du repère global de la structure sont des axes centraux principaux du système. Etant donné que les moments d'inertie atteignent les valeurs extrêmes ($I_{max}=I_{min}=I_z=I_y$), le moment d'inertie axial du contreventement par rapport à n'importe quel axe passant par le centre O du repère global vaut I_{max} . Cette orientation judicieuse des poteaux rectangulaires en forme d'étoile (Figure 6) procure au support un comportement équivalent à un support circulaire en forme d'anneau dont le moment d'inertie est le même dans tous les sens.

Un ingénieur civil qui négligerait ou omettrait les inclinaisons que font les poteaux du pilotis avec les axes OY et OZ du repère

Tableau 1 : Caractéristiques géométriques du réservoir surélevé.

Volume réel du réservoir	1000,00	m ³
Nombre de poteaux	12	
Dimensions des poteaux	0,70 x 0,90	m ²
Rayon de l'axe moyen du support en pilotis	5,10	m

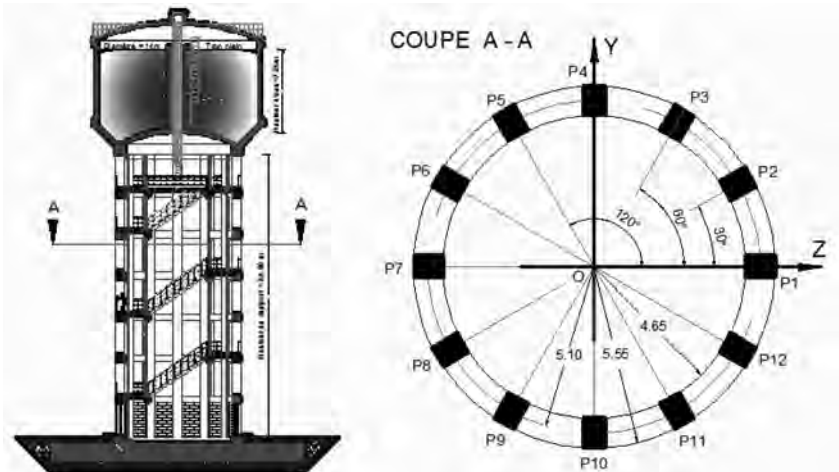


Figure 6. Coupe longitudinale du réservoir d'El Meneaa avec la coupe transversale de son support en pilotis [1].

Tableau 2 : Résultats récapitulatifs du calcul analytique des moments d'inertie.

N° du poteau	Angle $\beta(^{\circ})$	Angle $\alpha(^{\circ})$	I_y^i [m ⁴]	I_z^i [m ⁴]	I_{yz}^i [m ⁴]	I_{y1}^i [m ⁴]	I_{z1}^i [m ⁴]	I_{y1z1}^i [m ⁴]	I_y^i [m ⁴]	I_z^i [m ⁴]	I_{yz}^i [m ⁴]
1	00	90	0,03	0,04	0,00	0,03	16,43	0,00	16,43	0,03	- 0,00
2	30	60	0,03	0,04	0,00	0,03	16,43	0,00	12,33	4,13	- 7,10
3	60	30	0,03	0,04	0,00	0,03	16,43	0,00	4,13	12,33	- 7,10
4	90	00	0,03	0,04	0,00	0,03	16,43	0,00	0,03	16,43	0,00
5	120	- 30	0,03	0,04	0,00	0,03	16,43	0,00	4,13	12,33	7,10
6	150	- 60	0,03	0,04	0,00	0,03	16,43	0,00	12,33	4,13	7,10
7	180	- 90	0,03	0,04	0,00	0,03	16,43	0,00	16,43	0,03	0,00
8	210	- 120	0,03	0,04	0,00	0,03	16,43	0,00	12,33	4,13	- 7,10
9	240	- 150	0,03	0,04	0,00	0,03	16,43	0,00	4,13	12,33	- 7,10
10	270	- 180	0,03	0,04	0,00	0,03	16,43	0,00	0,03	16,43	0,00
11	300	- 210	0,03	0,04	0,00	0,03	16,43	0,00	4,13	12,33	7,10
12	330	- 240	0,03	0,04	0,00	0,03	16,43	0,00	12,33	4,13	7,10
					Somme		197,15		98,73	98,73	0,00

global l'amènerait à considérer que le moment d'inertie du support I_z , par rapport à l'axe OZ, est la somme des moments d'inertie I_{z1}^i , qui d'après le tableau 2, vaudrait 197.15 m⁴ au lieu de 98.73 m⁴. Le simple bon sens, incite à dire que la somme des moments d'inertie $\sum_{i=1}^{12} I_{z1}^i = 197.15 \text{ m}^4$, en soit n'a aucun sens physique. Cette confusion fortuite mais bien regrettable entre ces deux résultats qui présentent une grande analogie dans l'esprit des ingénieurs, peu expérimentés et moins aguerris aux calculs des rigidités (ou/et des moments d'inertie), nous conduira à surestimer la rigidité flexionnelle (EI) du support en pilotis. Cette surestimation de la rigidité du support aura pour conséquence de destiner l'ouvrage en question à des sollicitations sismiques d'une plus grande intensité pour les quelles il ne pourra pas résister dans la réalité étant donné que sa vraie rigidité est en-deçà de la rigidité supposée par l'ingénieur calculateur.

5.2. Construction graphique

La construction du cercle des inerties des poteaux du support en pilotis de notre application pratique est donnée dans la Figure 7, en suivant les étapes déjà énumérées en section (4.2).

- Les moments d'inertie axiaux ainsi que le produit d'inertie du poteau 1 correspondant à l'angle ($\alpha_1 = 90^\circ$), obtenus analytiquement sont : $I_{z1}^1 = 16.43 \text{ m}^4$, $I_{y1}^1 = 0.03 \text{ m}^4$ et $I_{y1z1}^1 = 0$.
- Nous localisons le point P_1 , représentatif du poteau 1, de coordonnées ($I_{y1}^1 = 0.03 \text{ m}^4$; $I_{y1z1}^1 = 0 \text{ m}^4$) sur l'axe OI_z des abscisses.
- Nous localisons le point C de coordonnées (16.46 m⁴, 0), désignant le centre du cercle des inerties sur l'axe OI_z des abscisses.
- Nous traçons le cercle de Mohr de centre C, de rayon $R = 8.20 \text{ m}^4$ et passant par le point P_1 .
L'axe Oz_1 du poteau 2 forme un angle de 30° par rapport à celui du poteau 1 dans la réalité (Figure 6). Le point P_2 devra parcourir le double (soit donc 60°) sur le cercle des inerties par rapport au point P_1 . L'axe Oz_1 du poteau 3 forme un angle de 60° par rapport à celui du poteau 1 dans la réalité

(Figure 6). Le point P_2 devra parcourir le double (soit donc 120°) sur le cercle des inerties par rapport au point P_1 . Avec la même démarche, nous pouvons placer sur le cercle des inerties les points représentatifs ($P_4, P_5 \dots$ et P_{12}) correspondant aux poteaux (4, 5 ... et 12).

Il est aisé de déduire que deux poteaux, dont les axes Oz_1 forment un angle droit dans la réalité, sont diamétralement opposés sur le cercle de Mohr tels que les points P_1 et P_4 ou les points P_2 et P_5 ou encore les points P_3 et P_6 .

Deux poteaux, dont les axes Oz_1 forment un angle plat (opposés) dans la réalité, sont confondus sur le cercle de Mohr tels que les points ($P_1 - P_7$, $P_2 - P_8$, $P_3 - P_9$, $P_4 - P_{10}$, $P_5 - P_{11}$ et enfin $P_6 - P_{12}$).

Nous nous rendons compte qu'à partir du seul poteau 1, nous pouvons aisément déduire tous les moments d'inertie (et produit d'inertie) des poteaux du support d'un réservoir surélevé par de simples rotations sur le cercle des inerties en fonction des inclinaisons des poteaux entre eux dans la réalité, en exploitant leur symétrie.

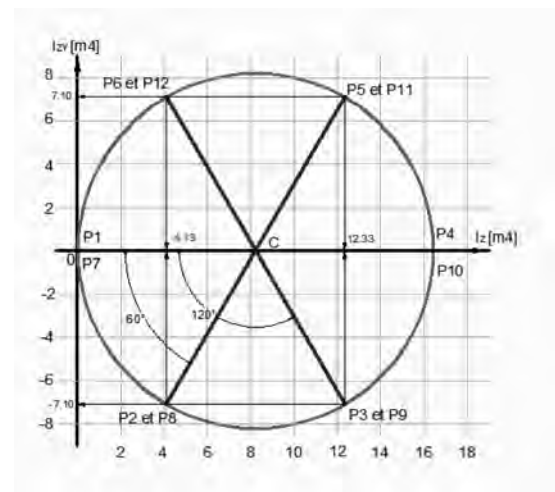


Figure 7. Construction du cercle des inerties des poteaux du support en pilotis du réservoir d'El Meneaa

6. CONCLUSION

Nous venons d'illustrer à travers cette contribution que le calcul des moments d'inertie (et produit d'inertie) des poteaux du support d'un réservoir sur pilotis peut être résolu analytiquement ou graphiquement. Avec un exemple pratique, nous sommes arrivés à mettre en évidence que l'approche analytique proposée présente des équations pas trop complexes et donne lieu à des résolutions simples. La démarche de résolution proposée n'est pas complexe d'utilisation, et s'accommode aisément d'une programmation avec Matlab ou simplement sur un classeur Excel. Quant aux lecteurs amateurs de solutions graphiques, ils auront trouvé une procédure élégante de la déduction des moments d'inertie de chaque poteau par rapport à l'axe O_z , à partir du cercle de Mohr par la seule connaissance des moments d'inertie axiaux (I_{z1}^1 et I_{y1}^1) du poteau P_1 . Cette construction graphique du cercle des inerties résulte de l'adaptation de la méthode de l'évaluation des caractéristiques des sections planes.

A travers l'exemple pratique que nous avons traité, nous avons pu démontré que l'omission de la prise en compte de la rotation des axes principaux de chaque poteau constituant le pilotis par rapport à l'axe horizontal OZ du repère global de la structure peut altérer d'une manière significative la précision des calculs qui peuvent en découler, en terme d'évaluation de la force sismique et de réponse sismique de la structure. Il va sans dire que les conclusions et interprétations qui seront déduites de ces résultats seront très éloignées de la réalité.

REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à présenter leurs remerciements au Bureau d'études African Geosystem Company (<http://www.agc-dz.com>) qui a mis à leur disposition la documentation de l'exemple pratique.

RÉFÉRENCES

- [1] AGC-Egis. Etude d'exécution d'un réservoir surélevé circulaire en béton de capacité 1000 m³ de la ville d'El Menea. Rapport interne, 2014 ; 45p.
- [2] Birot P. Travaux récents sur la mécanique des roches – Le colloque de Santa Monica. Annales de géographie, 1968 ; 77 (419) : 85-86.
- [3] Costabel P. Histoire du moment d'inertie. Revue d'histoire des sciences et leurs applications, Tome 3, 1950 ; 4 : 315-336.
- [4] DTR B-C 2-48, Règles parasismiques algériennes (RPA 99 - addenda 2003), CGS, Alger, juin 2003.
- [5] Hammoum H., Bouzelha K., Hannachi N.E. Etude au séisme d'un réservoir surélevé en béton armé. Annales du BTP, 2016 ; 2 : 20-32.
- [6] Hammoum H., Morsli S., Tabellout L., Kouchah K., Bouzelha K. Analyse des contraintes de traction dans le support d'un réservoir circulaire surélevé en béton arme sous l'action sismique, Colloque international sur la caractérisation et la modélisation des matériaux et des structures, CMMS14, Tizi Ouzou, Algérie, 12-13 Novembre 2014.
- [7] Pissarenko G., Yakovlev A., Matveev V. Aide mémoire de résistance des matériaux, Editions Mir, Moscou ; 1975.