

# MODÉLISATION ANALYTIQUE DES PHÉNOMÈNES D'INTERACTION SOL-STRUCTURE

## ANALYTICAL MODEL OF THE SOIL-STRUCTURE INTERACTION

---

**Bakri BASMAJI<sup>1</sup>, Olivier DECK<sup>1</sup>, Marwan ALHEIB<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Université de Lorraine, CNRS, CREGU, GeoRessources, F-54042, France, Bakri.BASMAJI@gmail.com  
olivier.deck@univ-lorraine

<sup>2</sup> INERIS –, Marwan.ALHEIB@ineris.fr

---

### 1. INTRODUCTION

Les bâtiments sont des structures susceptibles d'être endommagées lorsque leur terrain d'assise subit des mouvements (retrait-gonflement, affaissement minier, influence d'une excavation...). Les méthodes mises en œuvre pour étudier le comportement des ouvrages et leur vulnérabilité en zone de mouvement de terrains sont de quatre natures : empiriques, analytiques, numériques et expérimentales.

Les méthodes analytiques sont basées sur une modélisation des structures par une poutre ou un ensemble de poutres, au sens de la Résistance des Matériaux. Ces méthodes, initiées par Burland et Wroth (1974) ont fait l'objet d'un grand nombre de développements (Boscardin et Cording 1989, Boone 1996 et 2001). Le principe général consiste à supposer que le bâti subira une déflexion  $\Delta$  assimilable à la flèche d'une poutre en flexion simple et d'obtenir une rela-

tion entre l'intensité des déformations maximales dans la structure et la flèche maximale  $\Delta$ . L'utilisation de valeurs seuils sur la déformation maximale dans la structure permet alors d'associer un niveau de dommage à chaque valeur de  $\Delta$ . Cette approche permet de justifier analytiquement des valeurs seuils de  $\Delta$  empiriques. Néanmoins, son application dans un contexte de prévision des dommages provoqués par un mouvement de terrain d'intensité donnée soulève une grande difficulté. Il convient en effet d'évaluer d'abord la flèche maximale du bâti  $\Delta$  en fonction du mouvement en champ libre  $\Delta_0$ .

Les différentes approches proposées mettent en évidence la nécessité de distinguer deux mouvements du terrain :

- Le mouvement en champ libre  $\Delta_0$  qui caractérise le mouvement subi par le terrain en l'absence de toute interaction avec un ouvrage, elle correspond à la déflexion maximale que le bâti est susceptible de subir sous l'hypothèse que la totalité du mouvement du terrain lui est

transmise. Il existe une relation géométrique entre la courbure du terrain, la déflexion et la longueur du bâtiment (Burland et Wroth 1974, Kratzsch 1983) :

$$\Delta_0 = L^2/8R \quad \text{Équation 1}$$

– La flèche maximale au bâti  $\Delta$  (assez difficile à trouver) qui peut être significativement inférieure au déplacement en champ libre compte tenu des phénomènes d'interaction sol-structure, en particulier pour des structures rigides.

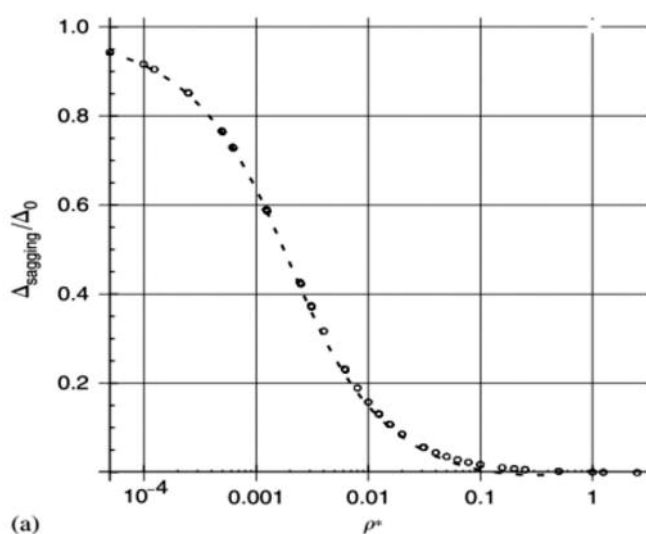
Deck et Singh (2010) ont utilisé un modèle analytique basé sur le modèle de Winkler pour calculer le taux de transmission de la déflexion  $\Delta/\Delta_0$ . Les résultats obtenus peuvent se représenter sous la forme d'une courbe reliant le taux de transmission de la déflexion en fonction de la rigidité relative en flexion (Figure 1 et Equ. 2). Ils ont comparé leurs résultats analytiques à des résultats numériques, la comparaison montrait des différences qui pouvaient s'expliquer par l'utilisation d'un modèle trop simple du terrain et de la structure.

$$\rho^* = \frac{EI}{K_w \cdot B \cdot L^4} \quad \text{Équation 2}$$

avec  $K_w$  le module de réaction du sol [Pa/m], EI la rigidité à la flexion de la poutre, B la largeur du bâti, L la longueur du bâtiment. Goh et Maire (2011) ont défini une mesure différente de la rigidité relative (Equ.3) qui sera utilisée dans cet article pour présenter et comparer les résultats obtenus selon le modèle de sol utilisé, Avec Et le module de Young du sol.

$$\rho^* = \frac{EI}{E_t \cdot B \cdot L^3} \quad \text{Équation 3}$$

Dans les paragraphes suivants, on développe un modèle analytique afin d'améliorer l'évaluation du taux de transmission de la déflexion en tenant compte de l'influence du cisaillement dans le terrain et dans le bâti. On modélise alors le comportement du sol avec le modèle de Pasternak en remplacement du modèle de Winkler.



**Figure 1 : Taux de transmission maximal de la déflexion en fonction du coefficient de rigidité relative en flexion (Deck et Singh 2010)**

## 2. LE MODÈLE ANALYTIQUE DÉVELOPPÉ

Le modèle analytique initialement développé par Deck et Singh (2010) consiste à rechercher la position d'équilibre d'une poutre élastique de longueur L, hauteur H, largeur B et de module de Young E, reposant sur un terrain initialement courbe décrit par une équation  $v(x)$  et modélisé par des éléments de Winkler. La poutre est sollicitée par une charge verticale uniforme q et la distribution  $p(x)$  correspond à la réaction du sol (Équation 4),  $w(x)$  est la déformée du terrain. L'utilisation du modèle de Winkler présente des inconvénients comme le choix du coefficient de raideur  $K_w$ , et les discontinuités de déplacement du terrain que ce modèle provoque.

$$p(x) = K_w \cdot B \cdot w(x) \quad \text{Équation 4}$$

Le modèle présenté ici a été développé en utilisant le modèle de Pasternak qui consiste à introduire un certain degré d'interaction entre les ressorts adjacents du massif de Winkler. Cette interaction est assurée par l'intermédiaire d'un coefficient de rigidité tangentielle  $G_p$  du sol en plus de la rigidité normal  $K_p$  (équation 5).

$$p(x) = K_p \cdot B \cdot w(x) - G_p \cdot B \cdot w''(x) \quad \text{Équation 5}$$

avec  $p(x)$  [N/m] la réaction du sol s'appliquant sur une largeur B de la poutre,  $G_p$  le module de cisaillement dans le plan horizontal [N/m],  $K_p$  le module de réaction du sol [Pa/m] et  $w(x)$  la déformée du terrain.

Lorsque  $G_p$  est nul, le modèle de Pasternak est identique au modèle de Winkler. On utilisera alors la notation  $K_w$  pour le module de réaction du sol [Pa/m]. Il est important de souligner ici qu'un même sol modélisé par un modèle de Winkler ou de Pasternak aura des modules  $K_p$  et  $K_w$  différents, dès lors que  $G_p$  est non nul (cf. section suivante).

Deux différences essentielles sont observées entre le modèle de Winkler et celui de Pasternak sollicités par une distribution de charge uniforme. Un tassement uniforme du terrain est observé sous le bâti et aucun déplacement en dehors de la zone de chargement dans le cas de Winkler, alors qu'une continuité de déplacement du terrain sous et hors le bâti est bien notée dans le cas du modèle de Pasternak.

Le comportement du bâtiment a été initialement modélisé par une poutre de Euler-Bernoulli (équation 6) qui ne considère pas l'influence du cisaillement du bâti sur la déformée.

$$y''(x) = \frac{-M(x)}{EI} \quad \text{Équation 6}$$

avec  $y''(x)$  la déformée du bâti,  $M(x)$  le moment fléchissant, EI la rigidité à la flexion.

La condition de non interpénétration du sol et du bâti impose une relation entre la déformée du bâti  $y(x)$ , la déformée du sol  $w(x)$ , la déformée initiale du terrain  $v(x)$  et le déplacement de corps rigide du bâti d (Equ.7 et Figure 2).

$$y(x) = w(x) - d + v(x) \quad \text{Équation 7}$$

$v(x)$  correspond à la forme de courbure initiale du terrain. Un modèle parabolique est choisi pour introduire le tassement différentiel du terrain en champs libre  $\Delta_0$  (Equ.8).

$$v(x) = \Delta_0 \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) \quad \text{Équation 8}$$

Le mouvement de corps rigide  $d$  est donc égal à  $w(L/2)$  et la flèche maximale du bâti  $\Delta$  est égal à  $y(0)$ . L'association du modèle de Pasternak (Equ 5), de l'équation différentielle du bâti (Equ 6) et de la condition de non interpénétration (Equ. 7) permet d'aboutir à l'équation différentielle caractéristique du système (Equ.9).

$$EI.w^{(4)}(x) - (Gp.B)w^{(2)}(x) + K_p.B.w(x) = q \quad \text{Équation 9}$$

L'équation différentielle qui caractérise le mouvement du terrain en dehors du bâti ( $x > L/2$ ) est l'équation 10.

$$Gp.B.w^{(2)}(x) + K_p.B.w(x) = 0 \quad \text{Équation 10}$$

La solution analytique de 9 et 10 fait apparaître 4 constantes d'intégrations qui nécessitent pour être déterminées de définir les 4 conditions aux limites suivantes :

- Une déflexion nulle de la poutre à ses extrémités :  $y(L/2) = 0$ .
- Un moment fléchissant nul aux extrémités de la poutre  $y''(L/2) = 0$ .
- La continuité du déplacement du terrain sous et hors la poutre  $w_1(L/2) = w_2(L/2)$ .
- Un effort tranchant aux extrémités de la poutre tel que :  $F = G_p \cdot \Delta w'(L/2)$  Équation 11

### 3. DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODOLOGIE POUR LE CHOIX DES PARAMÈTRES DE SOL (PARAMÈTRES DE WINKLER ET PASTERNAK)

Le modèle analytique présenté nécessite d'utiliser des paramètres du terrain pertinents. Néanmoins, il n'existe pas de relation théorique exacte entre les valeurs des para-

mètres de Pasternak  $K_p$ ,  $G_p$  et les propriétés élastiques du terrain (module de Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ ). La méthodologie de choix des paramètres est basée sur une comparaison des résultats de tassements obtenus par les modèles analytiques de Winkler ou Pasternak et les solutions théoriques issues de l'étude du comportement des milieux semi-infinis (modèles de Boussinesq et Flamant). Boussinesq (1885) a calculé le déplacement vertical généré par une force ponctuelle  $p$  appliquée en surface d'un milieu élastique semi-infini défini par son module de Young  $E$  et son coefficient de poisson  $\nu$  (équation 12)

$$u_z(x, y, z) = \frac{2(1+\nu)p}{4\pi E \sqrt{y^2 + x^2 + z^2}} \left( (2(1-\nu) + \frac{z^2}{y^2 + x^2 + z^2}) \right) \quad \text{Équation 12}$$

Pour une couche de terrain compressible d'une épaisseur finie  $h$ , le déplacement du terrain en surface peut être approximé par l'équation 13 :

$$u_{z1}(x, y) = u_z(x, y, 0) - u_z(x, y, h) \quad \text{Équation 13}$$

Flamant (1892) utilise la relation de Boussinesq pour calculer le tassement induit par une charge surfacique de largeur  $2b$  selon  $x$  et infinie selon la direction  $y$ . Ce déplacement  $u_{z2}$  est obtenu par intégration de la solution de Boussinesq (Equ. 14)

$$u_{z2}(x, h) = \int_{x-b}^{x+b} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{z1}(u, v).dv..du \quad \text{Équation 14}$$

La méthodologie développée pour définir les valeurs numériques des paramètres du terrain ( $K_p$  et  $G_p$ ) est basée sur l'ajustement entre les résultats théoriques (Equ.14) et la solution obtenue par le modèle de Pasternak pour une charge infinie de largeur  $2b$  appliquée sur le terrain (obtenue par résolution de l'équation 5 pour  $p(x) = p$  constant). Ces deux équations correspondant respectivement au tassement prédit par le modèle de Flamant ou le modèle de Pasternak, sont différentes. Il est possible de calculer les paramètres  $K_p$  et  $G_p$  en imposant l'égalité de ces deux équations.

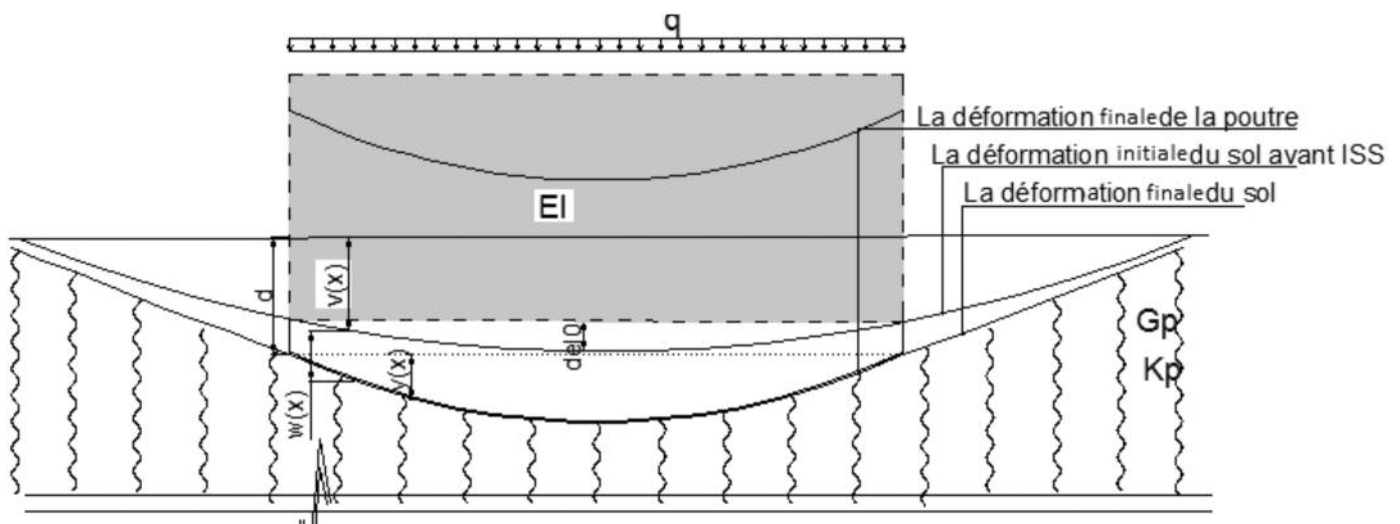


Figure 2 : Différents mouvements du terrain et du bâti pour étudier l'influence d'une courbure initiale du terrain  $v(x)$  sur la déformée finale du bâti  $y(x)$ .

tions pour des abscisses particulières. On impose par exemple que les déplacements obtenus à partir de ces deux modèles soient les mêmes aux abscisses  $x = 0$  (centre de la charge) et  $x = b$  (extrémité de la zone chargée).

On obtient donc deux équations à deux inconnus ( $K_p$  et  $G_p$ ). Les valeurs de  $K_p$  et  $G_p$  sont indépendantes de l'intensité de la charge. Les solutions sont exprimées par des abaques (Figure 3), pour un module de Young du terrain égal à 1 MPa. Pour d'autres valeurs du module de Young du terrain, il convient de multiplier les valeurs de  $K_p$  et  $G_p$  fournies dans les abaques, par le module de Young du terrain (Equ 15, Equ 16).

$$K_p(E_t) = K_p \cdot E_t \quad \text{Équation 15}$$

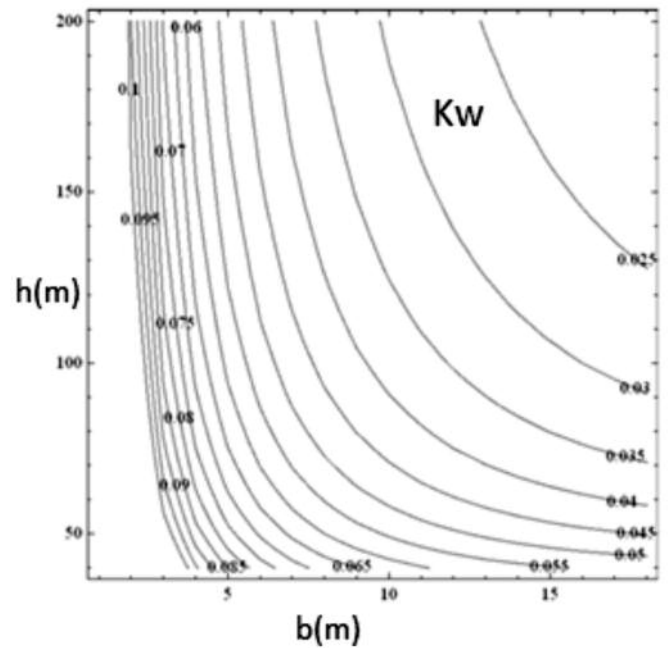
$$G_p(E_t) = G_p \cdot E_t \quad \text{Équation 16}$$

On utilise la même méthode pour trouver le module de réaction du sol  $K_w$  pour le modèle de Winkler. Dans ce cas, on cherche la valeur de  $K_w$  permettant d'obtenir un tassement moyen sous la charge  $w$  identique entre le modèle de Flamant et le modèle de Winkler.

$$K_w(E_t) = K_w \cdot E_t \quad \text{Équation 17}$$

#### 4. EXPLOITATION DU MODÈLE ANALYTIQUE : COMPARAISON ENTRE LE MODÈLE DE WINKLER ET LE MODÈLE DE PASTERNAK

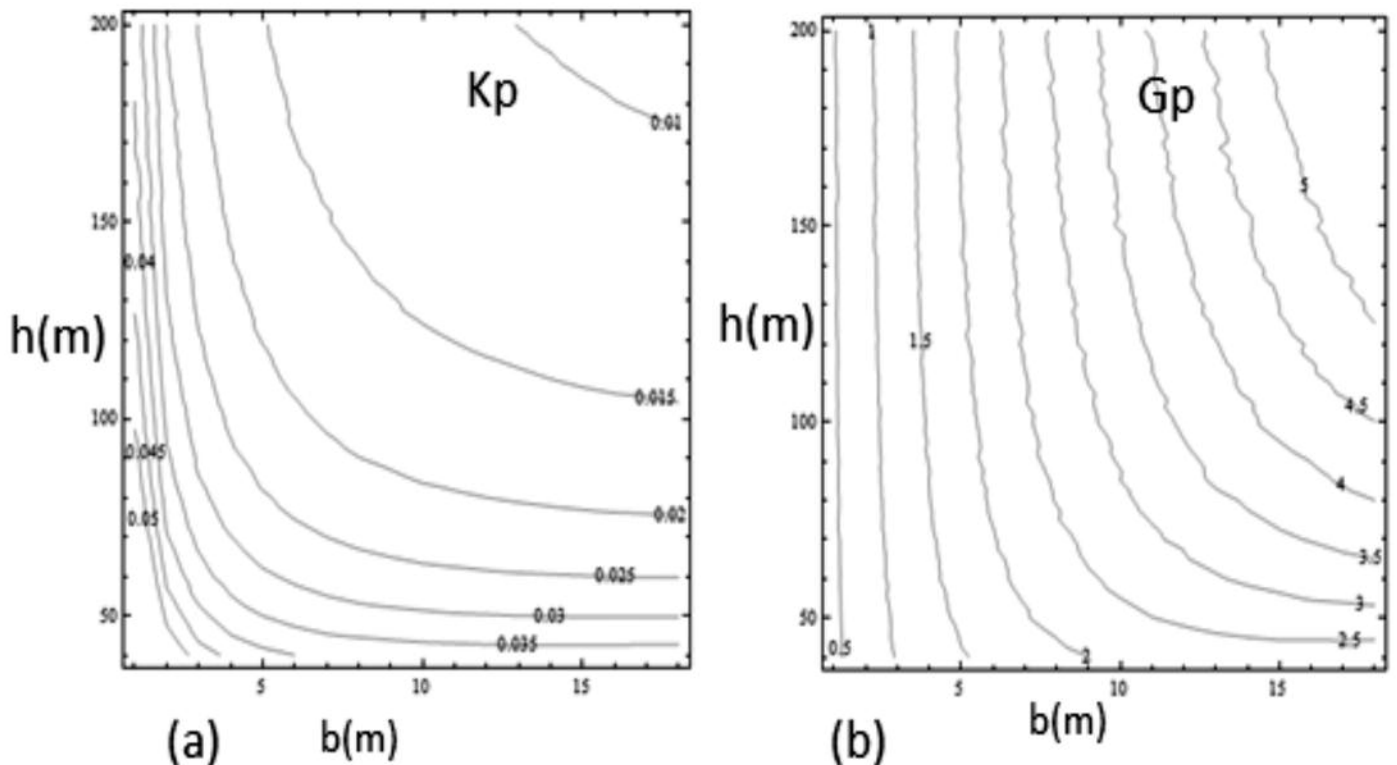
Après avoir défini de façon satisfaisante les 2 paramètres de Pasternak et la valeur du module de réaction de sol de Winkler afin que ces valeurs soient représentatives d'un



**Figure 4 :** Abaque permettant de trouver le module de réaction du sol  $K_w$  du modèle de Winkler en fonction de la demi-largeur de la charge  $b$  et de l'épaisseur du terrain  $h$  ( $E_t = 1 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ). Pour d'autres valeurs du module de Young du terrain, il convient de multiplier les valeurs fournies par les abaques par le module de Young de terrain.

même sol, on utilise ces paramètres dans nos calculs pour trouver la flèche maximale d'un bâti en zone de mouvement de terrain.

On a choisi des valeurs différentes de la longueur de bâti, de la rigidité à la flexion  $EI$  et du module de Young du ter-



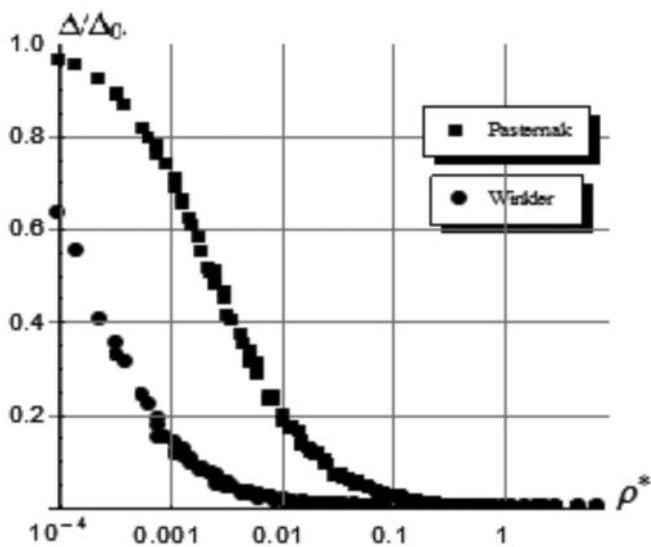
**Figure 3: (a,b)** Abaques permettant de trouver les modules de réaction du sol  $K_p$  (a),  $G_p$  (b) du modèle de Pasternak en fonction de la demi-largeur de la charge  $b$  et de l'épaisseur du terrain  $h$  ( $E_t = 1 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ). Pour d'autres valeurs du module de Young du terrain, il convient de multiplier les valeurs fournies par les abaques par le module de Young de terrain



rain afin de modéliser une large gamme de situations différentes. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4. On observe une différence significative entre les résultats de Winkler et ceux de Pasternak. L'influence de la déformée associée au cisaillement dans le sol est donc importante, elle doit être prise en compte pour calculer la flèche maximale finale d'un bâti dans une zone de mouvement de terrain. Les résultats obtenus avec le modèle de Pasternak montrent un taux de transmission de la déflexion plus important qu'avec le modèle de Winkler. Ceci s'explique par le fait que le tassement  $v(x)$  du terrain au centre du bâti s'accroît au fur et à mesure du tassement du terrain aux extrémités du bâti (influence des déformations de cisaillement).

Les valeurs de  $\Delta/\Delta_0$  se rapprochent de 1 pour des faibles valeurs de  $\rho^*$ , ce qui correspond au cas d'un bâti très souple sur un sol rigide. Inversement, la déflexion transmise devient quasiment nulle pour une valeur élevée de la rigidité relative, c'est à dire pour un bâti rigide en comparaison avec le terrain.

Les calculs ont été menés en vérifiant que le contact sol-bâti était maintenu sur toute la longueur de la structure (il n'y a pas de vide généré sous le bâti). Dans certaines situations, associées à un bâti très rigide et/ou une valeur initiale de  $\Delta_0$  importante, un vide pourrait en effet se créer sous le bâti. Les calculs présentés sur la Figure 5 constituent ainsi une borne supérieure de la valeur de  $\Delta/\Delta_0$  puisque l'occurrence d'un décollement irait dans le sens d'une réduction de  $\Delta$  et donc de  $\Delta/\Delta_0$ .



**Figure 5: Taux de transmission de la déflexion (axe vertical) pour les deux modèles analytiques de Pasternak et Winkler en fonction de  $\rho^* = EI/(8.E_s.L^3)$ .**

## 5. CONCLUSION

Un modèle analytique a été développé afin de tenir compte de l'influence des déformations associées au cisaillement dans le sol sur le calcul du taux de transmission de la déflexion d'un ouvrage impacté par des mouvements de terrains. Cela est rendu possible grâce au modèle de Pasternak en remplacement du modèle de Winkler dans le modèle analytique.

Pour les deux modèles de sol, une méthodologie a été mise en œuvre afin de justifier les valeurs des paramètres en fonction des propriétés élastiques du sol.

La comparaison des résultats obtenus entre le modèle de Winkler et celui de Pasternak, tout en modélisant un même sol, montre des résultats significativement différents qui justifient la nécessité de tenir compte du cisaillement dans le terrain pour une évaluation précise du taux de déflexion d'un bâti. Des comparaisons avec des résultats de modélisations numériques (non présentées ici) conduisent à penser que les deux solutions de Winkler et Pasternak pourraient être utilisées pour estimer un encadrement de la solution d'équilibre réelle.

Les perspectives envisagées sont les suivantes :

- Modéliser un comportement élasto-plastique du terrain. Winkler et Pasternak ont supposé que le modèle de terrain est élastique, alors que le comportement réel est élasto-plastique.
- Considérer un modèle de bâti adapté aux faibles élancements (rapport  $L/H$  du bâti inférieur à 2 environ) pour lesquels la théorie des poutres ne peut pas s'appliquer.
- Envisager la validation des résultats à partir de modélisations numériques et d'essais physiques.

## 6. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Boscardin, M. and Cording, E. (1989). "Building Response to Excavation-Induced Settlement." *J. Geotech. Engrg.*, 115(1), 1–21.
- Boussinesq J. (1878). Équilibre d'élasticité d'un solide isotrope sans pesanteur, supportant différents poids. Paris, Vol. 86. pp. 1260-1263.
- Burland J.B, and Wroth C.P. (1974). Settlement of buildings and associated damage. Conference on the Settlement of Structures, Pentech Press, Cambridge, London , pp. 611–654.
- Deck O., Singh A. (2010). Analytical model for the prediction of building deflections induced by ground movements. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, DOI: 10.1002/nag.993.
- Flamant, A. (1892). Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement. *Compte. Rendu. Académie des Sciences. Sci., Paris*, vol. 114, p. 1465.
- Goh, KH, and Mair, RJ (2011) Building damage assessment for deep excavations in Singapore and the influence of building stiffness. *Geotechnical Engineering*, 42. pp. 1-12. ISSN 0046-5828.
- Kratzsch (1983) Mining subsidence engineering.
- Laefer, D. (2001) Prediction & Assessment of Ground Movement & Building Damage Induced by Adjacent Excavation. Dissertations/Theses.
- Potts D.M., Addenbrooke T.I. (1997). A structure's influence tunneling-induced ground movements. *Proceedings Institution of Civil Engineers, Geotechnical Engineering*; 125:109–125.
- Son M. and Cording E. (2005). "Estimation of Building Damage Due to Excavation-Induced Ground Movements." *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 131(2), 162–177.
- Son M. and Cording E. (2007). "Evaluation of Building Stiffness for Building Response Analysis to Excavation-Induced Ground Movements." *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 133(8), 995–1002.
- Wagner H, Schumann HER (1991). Surface effect of total coal seam extractions by underground mining methods. *J S Afr Inst Min Metal* 91:221–231.