



JNB'2017
Journées nationales du béton de Tunisie

MODÉLISATION ANALYTIQUE DE L'EFFET DU SQUELETTE GRANULAIRE SUR LE FLUAGE PROPRE DU BÉTON

ANALYTICAL PREDICTION OF AGGREGATES EFFECTS ON BASIC CREEP OF CONCRETE

Rahma ZOUAOUI⁽¹⁾, Karim MILED⁽²⁾, Oualid LIMAM⁽³⁾
Université de Tunis El Manar, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis,
Laboratoire de Génie Civil,
Tunisie

⁽¹⁾ rahma.zouaoui@enit.rnu.tn

⁽²⁾ karim.miled@enit.rnu.tn

⁽³⁾ oualid.limam@enit.rnu.tn

1. INTRODUCTION

Le fluage propre du béton est la déformation que l'on peut observer, en conditions isothermes, lors de l'application d'une charge maintenue constante sur une éprouvette en équilibre hydrique, c'est-à-dire sans échange d'humidité avec le milieu extérieur, à laquelle il faut retirer la déformation élastique instantanée et la déformation du retrait endogène [3]. L'étude de l'effet du squelette granulaire sur le comportement différé du béton a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche expérimentaux, analytiques et numériques [2, 4-6]. Le comportement à long terme peut varier de façon significative d'un béton à l'autre même lorsque leurs compositions initiales (rapport E/C et fraction volumique des granulats) sont similaires [6]. L'origine de cette différence est probablement due à l'auréole de transition (en anglais Interfacial Transition Zone ITZ) qui existe entre la pâte de ciment et les granulats et qui présente une porosité plus élevée que celle de la pâte pure [4, 6], ce qui

affecte négativement les propriétés mécaniques du béton en général et ses modules de déformation instantanée et différée en particulier [1, 7].

Ainsi, on s'intéresse dans ce travail à la prédiction analytique des déformations différées dues au fluage propre du béton sous l'action d'un chargement permanent de compression uniaxiale. Pour ce faire, le béton est modélisé par un composite à trois phases ; des granulats naturels de sable et de gravier (phase inclusions) entourés chacun par une auréole de transition (phase ITZ) d'épaisseur variable et noyés tous dans une pâte de ciment durcie (phase pâte cimentaire). D'abord, la fraction volumique de l'ITZ (f_{ITZ}) est évaluée analytiquement en se basant sur une modélisation discrète et probabiliste de la microstructure du béton, proposée récemment par Zouaoui *et al.* [1]. Ensuite, un modèle d'homogénéisation à 4 phases inspiré du modèle trisphère proposé par Le Roy [2] a été utilisé dans le cadre de la visco-élasticité linéaire non vieillissante, pour prédire le module différé effectif du béton en fonction de



sa composition et de sa microstructure. Dans ce modèle, l'expression analytique proposée par Zouaoui *et al.* [1] pour f_{ITZ} a été utilisée. Enfin, le modèle proposé est validé moyennant une confrontation entre ses prédictions et des résultats expérimentaux issus de la littérature.

2. DÉTERMINATION DE LA FRACTION VOLUMIQUE DE L'ITZ

On considère un volume élémentaire représentatif (VER) du béton qui occupe un grand domaine Ω contenant N granulats ayant une fraction volumique globale notée g . Les granulats désignés par Ω_i , $1 \leq i \leq N$ sont supposés sphériques de diamètre D_i , $1 \leq i \leq N$. En utilisant la tessellation de Voronoï [8], ce VER est décomposé en N domaines discrets désignés par $Vor(\Omega_i)$, $1 \leq i \leq N$ (figure 1).

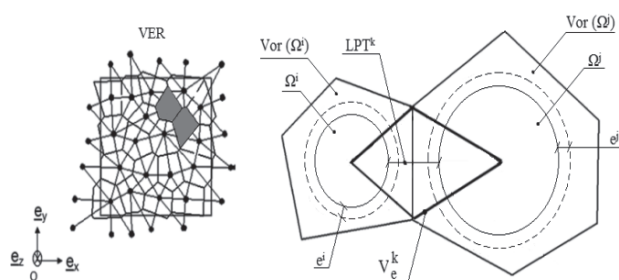


Figure 1. Le diagramme de Voronoï du VER du béton (à gauche) Deux granulats voisins en interaction (à droite)

Désignons par I l'ensemble des couples $k = (i, j)$ tel que le grain Ω_i est en interaction avec le grain Ω_j , $V_e^k (V_e^{ij} (1 \leq i, j \leq N))$ le volume d'interaction de deux granulats voisins Ω_i et Ω_j (figure 1) et N_c le nombre d'interactions dans le VER ($N_c = \text{Card}\{I\}$). Ainsi, le volume d'interaction V_e^k est donné par :

$$V_e^k = \frac{Vor(\Omega_i)}{r_i} + \frac{Vor(\Omega_j)}{r_j} \quad (1)$$

Avec

$$Vor(\Omega_i) = \frac{\pi D_i^3}{6g}$$

r_i et r_j sont respectivement le nombre d'interactions, dit aussi coordination, entre les granulats Ω_i et Ω_j et leurs voisins dans le VER.

En outre, chaque grain Ω_i , $1 \leq i \leq N$ est entouré d'une auréole de transition (ITZ) d'épaisseur locale e_i , $1 \leq i \leq N$. Pour éviter le chevauchement entre les ITZs voisines, cette épaisseur locale de l'ITZ doit dépendre de l'épaisseur locale de la pâte de ciment, LPT^k , existant entre deux granulats voisins au sein de leur volume d'interaction (figure 1). Ainsi, e^k est estimée comme suit :

$$e^k = \min\left(c; \frac{LPT^k}{2}\right) \quad (2)$$

avec c l'épaisseur constante de l'ITZ qui dépendra du type de béton (en général, $c = 0,05$ mm pour les Bétons Ordinaires (BO) et $c = 0,01$ mm pour les Bétons à Hautes Performances (BHP) renfermant de la fumée de silice).

Quant à l'épaisseur locale de la pâte de ciment (en anglais Local Paste Thickness), elle est estimée comme suit [9, 10] :

$$LPT^k = \frac{1}{2}(a+b) \left(\left(\frac{g_{max}}{g} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \quad (3)$$

Avec g_{max} est la compacité granulaire du béton. Ainsi, lorsque $g = g_{max}$, LPT^k s'annule et les deux granulats voisins se touchent mais sans se chevaucher ou s'interpénétrer.

En posant : $k = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{g_{max}}{g} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right)$, e^k s'exprime aussi comme suit :

$$e^k = \min\left(c; \frac{\kappa}{2}(D_i + D_j)\right) \quad (4)$$

Enfin, f_{ITZ} est donnée par l'expression suivante :

$$f_{ITZ} = \frac{\int_{D_{min}}^{D_{max}} \int_{D_{min}}^{D_{max}} (((a + \min(2c; \kappa(a+b)))^3 - a^3) + ((b + \min(2c; \kappa(a+b)))^3 - b^3)) p_N(a) p_N(b) da db}{\int_{D_{min}}^{D_{max}} \int_{D_{min}}^{D_{max}} (a+b)^3 p_N(a) p_N(b) da db} \quad (5)$$

Avec $p_N(D)$ est la fonction de densité de probabilité en nombre associée à la fonction de distribution de taille des granulats en nombre désignée par $W_N(D)$ ($p_N(D) = \frac{dW_N}{dD}$), a et b sont deux grains voisins en interaction et considérées dorénavant comme deux variables statistiques indépendantes et D_{min} et D_{max} sont respectivement le diamètre minimal et le diamètre maximal de tous les granulats.

La fonction de distribution des tailles des granulats en volume suivante, proposée pour le béton par Funk and Dinger (1994), a été adoptée pour calculer analytiquement f_{ITZ} :

$$W_V(D) = \frac{D^m - D_{min}^m}{D_{max}^m - D_{min}^m} \quad (6)$$

Avec m est une constante positive qui varie entre 0 et 1. Lorsque m augmente, le pourcentage en volume des granulats fins diminue. Cette fonction permet d'approcher en général correctement la plupart des distributions granulaires des bétons.

La fonction de densité de probabilité en nombre $p_N(D)$ associée à $W_V(D)$ est donnée par :

$$p_N(D) = (3-m) \frac{D^{3-m} D_{min}^{3-m}}{(D_{max}^{3-m} - D_{min}^{3-m}) D^{4-m}} \quad (7)$$

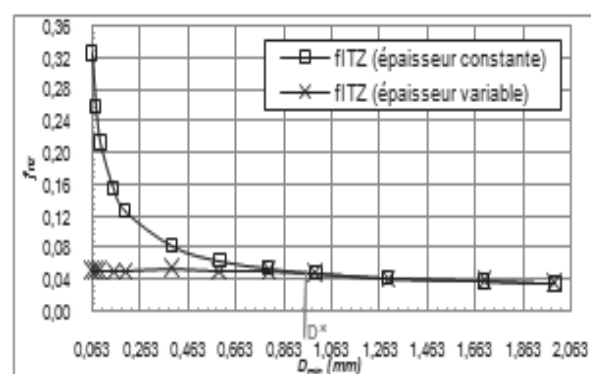


Figure 2. Comparaison entre f_{ITZ} (épaisseur constante) et f_{ITZ} (épaisseur variable) ($g=0.7$, $g_{max}=0.85$, $D_{max}=20$ mm, $m=0.5$ et $c=0.05$ mm)



L'expression de f_{ITZ} (Eq.5) est calculée analytiquement en supposant d'abord que l'épaisseur de l'ITZ est constante, égale à c , et ensuite numériquement en supposant une épaisseur variable de l'ITZ. Les résultats sont présentés en fonction du diamètre minimal D_{min} des granulats (figure 2) pour un béton ordinaire ayant une fraction volumique des granulats $g = 0,7$, $D_{max} = 20$ mm et $m = 0,5$.

La figure 2 montre que lorsque D_{min} est très petit, l'ordre de grandeur de f_{ITZ} calculée avec une épaisseur variable est faible (ne dépassant pas 7%) comparé à celui calculé avec une épaisseur uniforme et qui ne prend pas en considération le chevauchement entre les ITZs voisines. En outre, comme le montre la figure 2, les deux courbes des f_{ITZ} calculées respectivement avec une épaisseur locale constante et une épaisseur variable se superposent à partir d'une certaine valeur de D_{min} notée D^* et qui est évaluée analytiquement comme suit en supposant que $D_{min} \ll D_{max}$ [1] :

$$D^* = \frac{2-m}{3-m} \left(\frac{c}{\kappa} \right) \quad (D^* \text{ en millimètre}) \quad (8)$$

Ainsi, lorsque $D_{min} > D^*$, f_{ITZ} est donnée par l'expression analytique suivante, notée $f_{ITZ,D_{min}}$, et qui met en évidence et de façon explicite les effets de différents paramètres (l'épaisseur constante c de l'ITZ, la fraction volumique des granulats g , la distribution granulaire m , D_{min} et D_{max}) sur f_{ITZ} :

Avec :

$$f_{ITZ,D_{min}} = Ac[Bc^2 + Ec + F]$$

$$A = \frac{2gm}{(D_{max}^3 D_{min}^{3-m} - D_{min}^3 D_{max}^{3-m})}; \quad B = \frac{4(D_{max}^{3-m} - D_{min}^{3-m})}{(3-m)}$$

$$E = \frac{6(D_{max}^{3-m} D_{min} - D_{min}^{3-m} D_{max})}{(2-m)} \quad \text{et} \quad F = \frac{3(D_{max}^{3-m} D_{min}^2 - D_{min}^{3-m} D_{max}^2)}{(1-m)} \quad (9)$$

Et pour $D_{min} \leq D^*$, f_{ITZ} sera supposée constante en fonction de D_{min} et donnée par la même formule analytique de l'Eq. (9) mais dans laquelle D_{min} est remplacé par D^* . Elle est notée dans ce cas f_{ITZ,D^*} .

3. ÉVALUATION DU MODULE D'YOUNG DU BÉTON

Dans cette partie, le module d'Young du béton est estimé analytiquement avec un modèle d'homogénéisation quadrisphère (figure 3) de type composite de Hashin et Strickman [11] et dans lequel l'expression analytique proposée précédemment

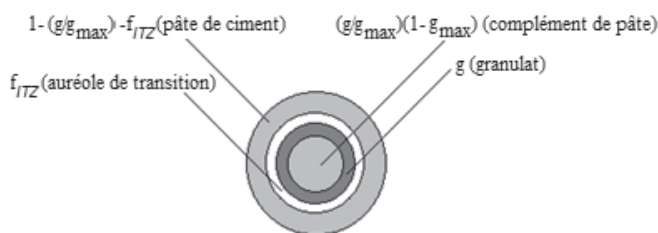


Figure 3. Modèle quadrisphère (extension du modèle trisphère [2])

pour f_{ITZ} (f_{ITZ,D^*} ou $f_{ITZ,D_{min}}$) a été utilisée. En outre, ce modèle est une extension du modèle trisphère développé initialement par Le Roy [2] pour les bétons et composites cimentaires à deux phases (sans ITZ). Ce modèle permet de prendre en compte le complément de pâte de ciment qui représente la partie de la pâte qui occupe les interstices laissés libres entre les granulats en état de compacité maximale (quand $g = g_{max}$), et que le modèle bisphère de Hashin (1962) est incapable de prendre en compte. Dans le modèle quadrisphère proposé, on suppose d'abord que chaque phase i est homogène isotrope élastique linéaire caractérisée par un module d'Young E_i et un coefficient de Poisson ν_i , que chaque interface est parfaite et que $\nu^{eff} = \nu_p = \nu_{ITZ} = \nu_g = 0.2$ [2].

Ainsi, selon ce modèle micromécanique, le module d'Young effectif, E^{eff} , du béton est donné par l'expression suivante :

$$E^{eff} = \frac{(1+R)}{(1-R)} E_p \quad (10)$$

Avec :

$$R = \frac{E_{max} \left(\frac{g}{g_{max}} (1+\alpha) - f_{ITZ} (1-\alpha) \right) - E_p \left(\frac{g}{g_{max}} (1+\alpha) + f_{ITZ} (1-\alpha) \right)}{(1+\alpha)(E_{max} + E_p)} \quad (11)$$

$$\text{Et } E_{max} = \left(\frac{(2-g_{max})E_p + g_{max}E_g}{(2-g_{max})E_g + g_{max}E_p} \right) E_g \quad (12)$$

Où E_p et E_g sont respectivement le module d'Young de la pâte de ciment et celui des granulats et α est le rapport entre les modules d'Young de l'ITZ et de la pâte de ciment.

4. EXTENSION DU MODÈLE À LA VISCO-ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

Dans ce qui suit, le comportement viscoélastique linéaire du béton est étudié analytiquement à travers l'extension du modèle d'homogénéisation utilisé précédemment en élasticité linéaire. Dans cette extension, les granulats sont supposés élastiques tandis que la pâte de ciment et l'ITZ sont supposées viscoélastiques. Ainsi, en viscoélasticité linéaire non vieillissante, l'Eq. (10) devient :

$$E^{eff}(t) = \frac{1+R(t)}{1-R(t)} E_p(t) \quad (13)$$

Avec $E_p(t) = \frac{1}{J_p(t_0, t)}$ où $J_p(t_0, t)$ est la fonction du fluage propre de la pâte de ciment homogène et dont l'expression en fonction du temps t peut être évaluée par un modèle rhéologique classique qui permet de modéliser correctement le comportement viscoélastique des matériaux solides, à l'instar du modèle de Kelvin-Voigt généralisé à n branches [12]. L'expression de $J_p(t_0, t)$ donnée par ce modèle rhéologique est la suivante :

$$J_p(t_0, t) = \frac{1}{E_{p0}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_{ip}} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau_i}} \right) \quad (14)$$

Avec E_{p0} est le module d'Young de la pâte mesuré au début de l'essai de fluage (à t_0), E_{ip} ($1 \leq i \leq n$) est le module d'Young et τ_i est le temps caractéristique de l'élément i de la chaîne de Kelvin-Voigt.





	c (mm)	g	g _{max}	D _{min} (mm)	D _{max} (mm)	f _{ITZ}	E _g (GPa)	E _p (GPa)	α
BO	0,05	0,705	0,87	0,08	20	0,05470	75	13,5	0,5
BHP 1	0,01	0,710				0,02403		29,5	
BHP 2	0,03	0,713				0,04145		19	

Tableau 1. Données utilisées pour la validation du modèle proposé [2]

5. VALIDATION DU MODÈLE PROPOSÉ

Pour valider le modèle proposé, une comparaison est conduite entre ses prédictions et les résultats expérimentaux de Le Roy [2] relatifs à un béton ordinaire (BO) à base d'une pâte cimentaire ordinaire (désignée par P50) ayant un rapport (E/C) = 0,5 et à deux bétons à hautes performances (BHP 1 et BHP 2) à base de pâtes cimentaires à hautes performances (P28 et P38) ayant respectivement un rapport (E/C) égal à 0,28 et à 0,38 (et renfermant de la fumée de silice (S) avec un rapport massique (S/C)=0,1). Ces trois bétons possèdent pratiquement le même squelette granulaire (voir tableau 1).

Les caractéristiques relatives au modèle rhéologique de Kelvin-Voigt généralisé à 8 branches, utilisé pour décrire le comportement viscoélastique des pâtes de ciment des trois bétons de Le Roy (1995) étudiés, sont résumées dans le tableau 2 et la comparaison

des courbes expérimentales et théoriques de la fonction de fluage propre de chaque pâte cimentaire est présentée dans la figure 4. Ainsi, d'après la figure 5, on peut conclure que le modèle proposé donne des bonnes prédictions des résultats obtenus expérimentalement et qui sont relatifs à l'évolution en fonction du temps des modules différés d'un béton ordinaire et de deux BHP de Le Roy [2].

6. CONCLUSION

Un modèle discret à trois phases, décrivant la microstructure du béton, a été développé récemment par Zouaoui *et al.* (2016) pour évaluer analytiquement la fraction volumique globale de l'ITZ dans le béton. Ensuite, le module d'Young du béton a été évalué analytiquement en utilisant un modèle d'homogénéisation quadrisphère qui est une extension du modèle

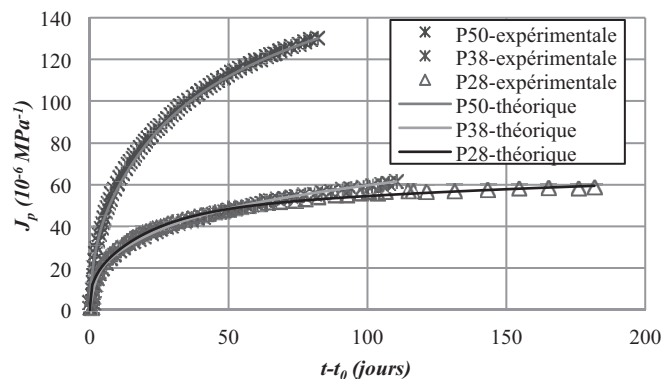


Figure 4. Fonctions de fluage expérimentale [2] et théorique des pâtes de ciment utilisées

τ _i	E _{ip} (pâte de ciment)		
	BO	BHP 1	BHP2
0,002	2663,66	543,88	2500,00
0,02	2572,92	350,80	2500,00
0,2	165,04	332,39	2500,00
2	47,66	140,00	67,60
20	16,09	32,00	44,46
200	8,29	50,00	20,69
2000	70,00	60,00	20,69

Tableau 2. Paramètres viscoélastiques du modèle rhéologique

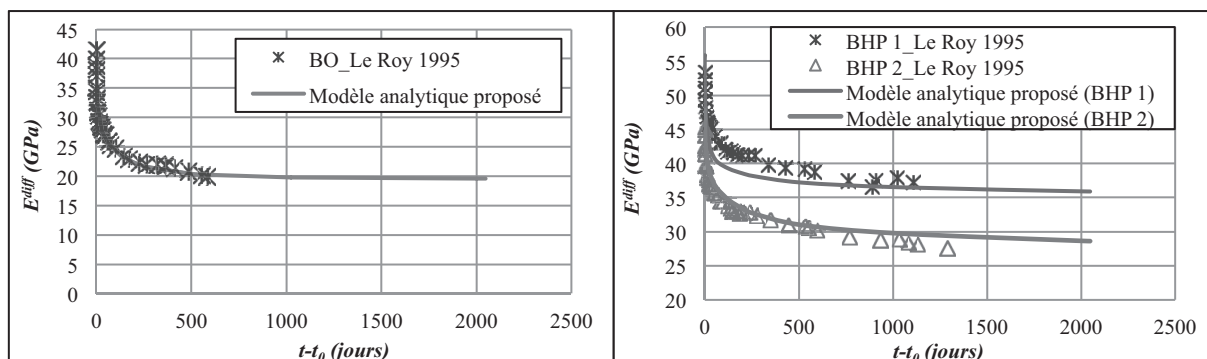


Figure 5. Comparaison entre les prédictions analytiques du modèle proposé et les résultats expérimentaux de Le Roy [2] pour le BO et les deux BHP





trispère de Le Roy (1995), et dans lequel l'expression analytique proposée pour f_{ITZ} a été utilisée. Le fluage propre du béton est prédit alors par une extension du modèle proposé en élasticité linéaire à la visco-élasticité linéaire non vieillissante. Enfin, la validité du modèle proposé a été discutée et vérifiée à travers une comparaison entre ses prédictions et les résultats expérimentaux de Le Roy (1995) relatifs à un béton ordinaire et à deux BHP.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Zouaoui R., Miled K., Limam O., Beddey A., Analytical prediction of aggregates' effects on the ITZ volume fraction and Young's modulus of concrete, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 41 (2017) 976-993 (DOI: 10.1002/nag.2660).
- [2] Le Roy R., Déformations instantanées et différées des bétons à hautes performances, Thèse de doctorat, ENPC, Paris, France (1995).
- [3] De Larrard F., Structures granulaires et formulation des bétons. Série Ouvrages d'art (OA34) du LCPC- Paris, 2000.
- [4] Lavergne F., Sab K., Sanahuja J., Bornert M., Toulemonde C., Investigation of the effect of aggregates' morphology on concrete creep properties by numerical simulations, *Cement and Concrete Research* 71 (2015) 14–28.
- [5] Thai M.Q., Modélisation micromécanique et simulation numérique du fluage des bétons avec prise en compte de l'endommagement et des effets thermo-hydriques, Thèse de doctorat, Université Paris-Est, France (2012).
- [6] Granger L., Comportement différé du béton dans les enceintes de centrales nucléaires : analyse et modélisation, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995.
- [7] Mehta P. K., Monteiro P. J. M., *Concrete: Microstructure, Properties, and Materials*, Third Edition, McGraw-Hill (2006).
- [8] Aurenhammer F., Klein R., Voronoi Diagrams, Chapter 5, in: Sack J., J. Urrutia (Eds.), *Handbook of computational geometry*, North-Holland: Amsterdam, Netherlands (2000) 201-290.
- [9] de Larrard F., Tondat P., Sur la contribution de la topologie du squelette granulaire à la résistance en compression du béton, *Mater. Struct.* 26 (1993) 505–516.
- [10] Miled K., Limam O. and Sab K., A probabilistic mechanical model for prediction of aggregates' size distribution effect on concrete compressive strength, *Phys. A* 391 (2012) 3366-3378.
- [11] Hashin Z., Shtrikman S., A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. of Mech. Phys. Solids*, 11 (1963) 127-140.
- [12] Salençon J., *Viscoélasticité pour le calcul des structures*, Edition de l'Ecole polytechnique et presse de l'ENPC (2009).





recommandations aux auteurs

CONTEXTE GÉNÉRAL

Les Annales du BTP sont avant tout une revue technique francophone s'adressant à un public d'ingénieurs et de décideurs œuvrant dans les multiples secteurs du BTP au sens le plus large du terme, à savoir la construction, le bâtiment, les travaux publics, l'ingénierie, les infrastructures urbaines et territoriales.

Les grands enjeux sous-tendus dans tout article pouvant paraître dans la revue sont à mettre en regard avec les problématiques d'aujourd'hui, progrès et innovation technologiques, développement économique dans le respect de l'environnement, valorisation des produits de la recherche dans le monde professionnel, défense du secteur de la construction dans l'économie mondiale...

Les auteurs sont invités à prendre en considération ces aspects dans toute leur diversité. Beaucoup d'articles en effet ne manqueront pas de se baser sur une présentation de travaux de recherche, qu'elle soit fondamentale ou appliquée. Néanmoins, à la différence d'une revue scientifique, les Annales attendent de ses contributeurs plus une description exhaustive de l'intérêt que leurs travaux pourraient présenter à la communauté professionnelle qu'une description précise de leur cheminement intellectuel.

Quand un article est le prolongement d'un colloque ou d'une rencontre scientifique, l'auteur devra donc veiller dans la réécriture à ne pas trop détailler sa démarche, mais à montrer l'intérêt de sa recherche pour le lectorat de la revue, en montrant en particulier dans l'introduction et la conclusion quels étaient ses grands objectifs. Il ne s'approfondira pas plus que nécessaire sur l'aspect scientifique, sachant que le lecteur ne sera pas forcément un spécialiste de sa discipline. En un mot l'auteur doit chercher à vulgariser son discours.

PRÉSENTATION DU MANUSCRIT

Le texte doit être soumis sous format électronique .doc ou .odt envoyé au rédacteur en chef François BUYLE-BODIN à l'adresse annalesbtp@gmail.com

En cas de refus de transmission pour cause de lourdeur des fichiers, l'auteur pourra envoyer un cédérom à **M. BUYLE-BODIN, rédacteur en chef de la revue Annales du BTP, Polytech'Lille – Université Lille 1, Cité Scientifique, 59655 Villeneuve-d'Ascq Cedex.**

Afin de faciliter la diffusion du savoir, l'éditeur n'exige pas des auteurs une mise en forme particulière de leur article. Aucune contrainte de longueur n'est posée, mais l'idéal est aux alentours de 15 pages en arial 10 interligne simple.

Les unités de mesures et les symboles doivent respecter les règles typographiques internationales.

Il est nécessaire de préciser :

- le titre en français et en anglais ;
- le ou les auteurs : nom, prénom, titres, coordonnées ;
- un résumé de 15 lignes maximum en français et en anglais ;
- les figures et photographies originales peuvent être fournies à part en .eps, .tif ou .jpg. Elles seront publiées en noir et blanc et doivent donc être d'un bon niveau de gris, au moins 400 dpi ;
- une illustration caractéristique de l'article pourra figurer en couleur sur la une de couverture et devra donc être d'une résolution maximale. Ne pas oublier de mentionner les crédits photographiques.

FONCTIONNEMENT DE LA RELECTURE

Le rédacteur en chef accuse réception du manuscrit et lance la phase d'approbation. Il s'appuie pour la relecture et la sélection finale des articles sur un comité comprenant des experts reconnus de la profession, ainsi que des membres des conseils scientifiques des principales associations du BTP partenaires des Annales.

Le rédacteur en chef de la revue fait part à l'auteur de la décision de publier ou non le texte, il précise éventuellement les corrections à apporter.

Le rédacteur en chef se charge de la transmission du manuscrit à l'éditeur.

AGPA Editions, 4, rue Camélinat, 42000 Saint-Etienne.

L'auteur recevra gratuitement quelques exemplaires du numéro de la revue dans lequel est publié son article.

