



# ANALYSE DU COMPORTEMENT ÉLASTIQUE ENDOMMAGEABLE D'ÉLÉMENTS FLÉCHIS EN BÉTON

## ANALYSIS OF DAMAGING ELASTIC BEHAVIOR OF CONCRETE BENDING ELEMENTS

**Marwa LOUKIL<sup>(1)</sup>, Wiem BEN HASSINE<sup>(2)</sup>, Oualid LIMAM<sup>(3)</sup>**  
École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, Laboratoire de Génie Civil,  
Université de Tunis El Manar, Tunisie.

<sup>(1)</sup> marwa.loukil@yahoo.fr

<sup>(2)</sup> wiem.benhassine@gmail.com

<sup>(3)</sup> oualid.limam@enit.rnu.tn

### 1. INTRODUCTION

Le béton a un comportement mécanique complexe, difficile à représenter par une seule loi macroscopique homogène. Cette complexité est liée notamment à la forte hétérogénéité du béton qui est un matériau composite constitué de granulats de différentes tailles et d'une matrice cimentaire. Les comportements mécaniques, les modèles constitutifs du béton sont l'objet de nombreuses recherches depuis le début du XX<sup>e</sup> siècle dans l'espoir de mieux comprendre les mécanismes de dégradation de ce matériau. On s'intéresse dans cette recherche aux modèles d'endommagement qui sont développés pour modéliser l'évolution des propriétés d'un matériau entre son état sain et son état endommagé. Le premier modèle d'endommagement qui a été proposé par Kachanov (1958) [1] était un modèle isotrope relatif à l'étude de fluage des métaux. Ensuite, ce modèle s'est étendu non seulement aux structures métalliques mais aussi bien aux structures en béton et en béton armé grâce aux travaux de J-Lemaitre [2], J-L. Chaboche (1978). En 1984, J. Mazars [3] a proposé un modèle de comportement du béton pour quantifier le dommage du matériau et évoluer la réduction de rigidité des éléments de structures. Ce modèle a été choisi comme

le modèle de référence pour le développement de cette étude. Dans ce travail, le modèle d'endommagement de Mazars est présenté pour développer en suite des solutions analytiques du comportement élastique-endommageable des poutres soumises à des efforts de flexion. Ces solutions seront confrontées à une modélisation à l'aide de la méthode des éléments finis sur le logiciel Cast3M.

### 2. RAPPEL SUR LE MODÈLE D'ENDOMMAGEMENT DE MAZARS

#### 2.1. Modèle d'endommagement local

Le modèle de comportement de Mazars (1984) est un modèle largement utilisé, réputé robuste, basé sur la mécanique de l'endommagement, qui permet de décrire la diminution de la rigidité du matériau sous l'effet de la création des microfissures dans le béton. Ce modèle s'appuie sur une seule variable interne scalaire  $D$ , décrivant l'endommagement de façon isotrope. Cette variable prend une valeur comprise entre 0 (béton





sain) et 1(béton rompu). La relation contrainte-déformation s'exprime alors de façon générale :

$$\sigma_{ij} = (1 - D)C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (1)$$

Où  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{kl}$  sont respectivement les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations, ( $i, j, k, l \in [1,3]$ ) ainsi que  $C_{ijkl}$  sont les composantes du tenseur de rigidité élastique et  $D$  la variable d'endommagement scalaire. L'évolution de l'endommagement scalaire est pilotée par la déformation équivalente  $\varepsilon_{\text{eq}}$  (2) qui traduit l'intensité des déformations locales et définie à partir d'une fonction seuil (3) :

$$\varepsilon_{\text{eq}} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} \quad (2)$$

Avec :  $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = 0$  si  $\varepsilon_i < 0$

$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \varepsilon_i$  si  $\varepsilon_i \geq 0$

$\varepsilon_i$  représente la déformation principale dans la direction  $i$ .

$$f(\varepsilon_{\text{eq}}, D) = \varepsilon_{\text{eq}} - k(D) \quad (3)$$

Avec :

- $k(D)$  est un paramètre contenant l'histoire de chargement.
- $k(D = 0) = \varepsilon_{d_0}$  est le seuil initial d'endommagement, en général  $\varepsilon_{d_0}$  est compris entre  $0.5 \cdot 10^{-4}$  et  $1.5 \cdot 10^{-4}$ .

Pour représenter le comportement dissymétrique du béton, Mazars a proposé deux modes d'endommagement  $D_t$  en traction et  $D_c$  en compression. Cette combinaison linéaire donne l'endommagement global isotrope comme suit :

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c \quad (4)$$

Où  $\alpha_t$  et  $\alpha_c$  sont deux coefficients tels que  $\alpha_t = 1$  et  $\alpha_c = 0$  en traction pure et  $\alpha_t = 0$  et  $\alpha_c = 1$  en compression pure. Ces deux lois d'évolution en chargement de compression et de traction font intervenir quatre paramètres qui sont respectivement  $A_c, B_c, A_t$  et  $B_t$ .

Cependant, l'utilisation de cette loi d'évolution lors des simulations numériques par éléments finis induit un grand nombre de problèmes notamment une forte dépendance de maillage ainsi un problème de la localisation des déformations qui est dû au caractère adoucissant des matériaux quasi-fragiles.

Plusieurs techniques de régularisation ont été adaptées afin de résoudre ces problèmes notamment les modèles d'endommagement non locaux.

## 2.2. Modèle d'endommagement non local

Depuis 1987, le modèle de Mazars a été modifié par Pijaudier Cabot et Bazant [4]. Cette approche non locale considère la valeur effective d'une variable en un point  $x$  comme la moyenne pondérée de cette même variable calculée sur un voisinage du point. Par la suite, l'endommagement scalaire est contrôlé par la moyenne pondérée  $\bar{\varepsilon}$  des déformations équivalentes  $\varepsilon_{\text{eq}}$  locales sur un volume  $\Omega$  tel que :

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{1}{V_r(x)} \int_{\Omega} \psi(x-s) \varepsilon_{\text{eq}}(s) ds \quad (5)$$

Avec :

- $V_r(x) = \int \psi(x-s) ds$  est le volume représentatif au point  $x$ .
- $\psi(x-s)$  est une fonction de pondération (Gaussienne) choisie arbitrairement tel que :

$$\psi(x-s) = \exp\left(\frac{-4\|x-s\|}{l_c^2}\right) \quad (6)$$

- $l_c$  est un nouveau paramètre du modèle d'endommagement non local appelé la longueur interne ou bien longueur caractéristique pour prendre en compte la localisation des phénomènes de fissuration.

## 3. MODÉLISATION PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

### 3.1. Modèle de comportement et caractéristiques du matériau

La loi élastique endommageable de Mazars dans sa version non locale est implémentée dans le code des éléments finis Cast3M. Ce dernier a été développé au Département de Mécanique et Technologie (DMT) du Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) [5]. Dans cette partie, il s'agit de modéliser une éprouvette rectangulaire en béton sur deux appuis soumise à un essai de flexion 3 points. Le prisme considéré a une longueur de 280 mm et une largeur de 70 mm avec une hauteur de 70 mm. Les éléments utilisés sont des éléments carrés à 4 nœuds de type QUA4 de taille 4 x 4mm. On a généré un maillage uniforme qui compte au total 1 260 nœuds tel que montré sur la figure 1. Les calculs ont été réalisés en mode contraintes planes et le modèle utilisé est celui de l'endommagement non local

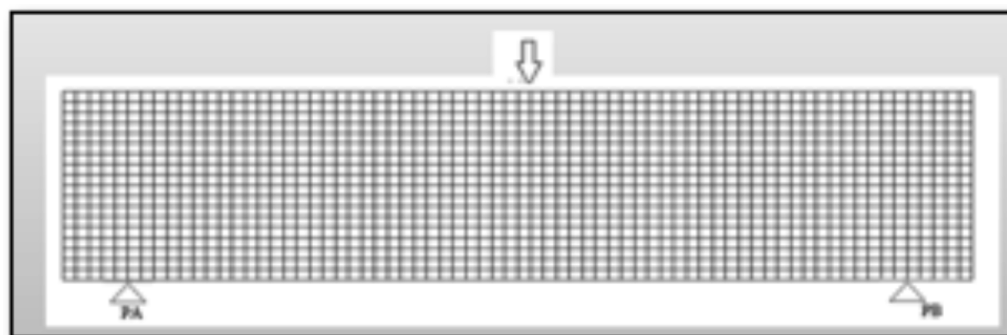


Figure 1. Géométrie et maillage du prisme.





Tableau 1. Caractéristiques du béton utilisé pour la simulation numérique.

E (MPa)	$\nu$	$\epsilon_{d0}$	$A_t$	$B_t$	$A_c$	$B_c$	$l_c$ (mm)
35400	0,2	$1 \cdot 10^{-4}$	0,95	10000	1,2	1500	20

de Mazars. Dans ce modèle interviennent huit paramètres, à savoir : le module d'élasticité  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , le seuil d'endommagement initial  $\epsilon_{d0}$ , et les paramètres en traction ( $A_t, B_t$ ) et en compression ( $A_c, B_c$ ) et la longueur caractéristique  $l_c$ . Ces paramètres sont regroupés dans le tableau 1 ci-dessus :

### 3.2. Conditions aux limites et chargement

Déplacement bloqué du premier appui articulé en PA :  $U_x = U_y = 0$  (figure 1)

Déplacement bloqué du deuxième appui simple en PB :  $U_y = 0$  (figure 1)

Déplacement vertical imposé selon  $U_y$  en point d'application de la force PC (figure 1)

### 3.3. Résultats de la simulation numérique

Le code Cast3M dans sa logique de produire des résultats utilise le calcul non linéaire appelé « PASAPAS » qui a été utilisé pour cette simulation. La variation du chargement vertical au milieu de la poutre en fonction du déplacement imposé est donnée sur la figure 2. Sur cette figure, on distingue trois phases :

- Une phase (O-A) : comportement linéaire croissant dans laquelle le déplacement augmente avec l'intensité de la force jusqu'à atteindre un déplacement de **0.0175mm** qui correspond à une force égale à **2.58kN** (au point A).
- Une phase (A-B) : L'endommagement apparaît puis se propage de manière non localisé. Cette phase a un comportement non linéaire croissant (pré-pic).
- Une phase (B-C) : comportement adoucissant, décroissant et caractérisée par la concentration d'une zone endommagée.

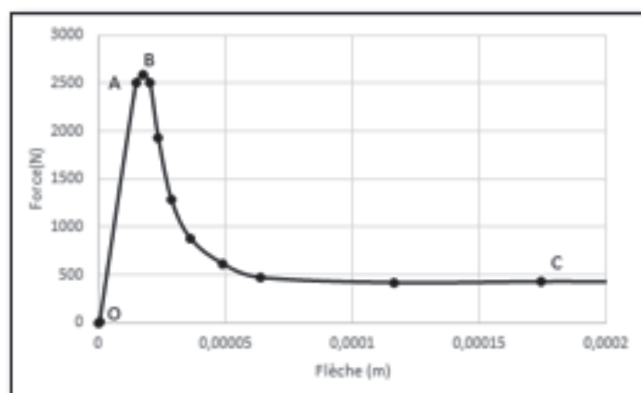


Figure 2. Courbe force-déplacement.

## 4. MODÈLE DE CALCUL ANALYTIQUE

On s'intéresse dans cette partie au développement d'un modèle analytique du comportement structural d'une poutre en flexion en béton. La prédiction du comportement d'une poutre en béton armé ou fibré en flexion est déterminée, dans le cadre de la théorie générale des poutres ainsi que les principes de base de la résistance des matériaux. En effet, la réponse d'éléments fléchis peut être prédite à l'aide des lois de comportement, en se basant sur les conditions d'équilibre et de compatibilité, et en adoptant l'hypothèse de Navier-Bernoulli. La loi de comportement en traction selon le modèle d'endommagement de Mazars est donnée par :

$$\sigma = E [1 - D_t(\epsilon)]\epsilon \quad (7)$$

Où :

- $E$  est le module d'Young
- $D_t$  représente la variable interne scalaire décrivant l'évolution de l'endommagement en traction monotone de façon isotrope tel que :

$$D_t = \begin{cases} 0 & 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{d0} \\ 1 - \frac{\epsilon_{d0}(1-A_t)}{\epsilon} - \frac{A_t}{e^{B_t(\epsilon-\epsilon_{d0})}} & \epsilon \geq \epsilon_{d0} \end{cases} \quad (8)$$

Avec :

- $\epsilon_{d0}$  est la déformation correspondante au seuil initial d'endommagement
- $A_t$  et  $B_t$  sont les paramètres de l'endommagement du modèle de Mazars qui permettent de moduler la forme de la courbe en post-pic.

Partant d'une section transversale de la poutre, en adoptant des déformations linéaires, il est aisé de représenter les contraintes en fonction du positionnement du seuil d'endommagement comme le montre la figure 4.

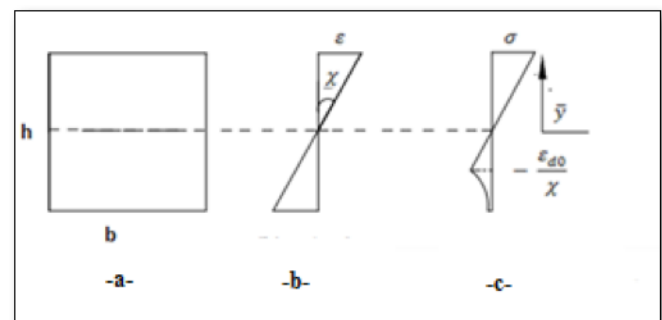


Figure 4. -a- section étudiée -b- répartition des déformations -c- répartition des contraintes





Dans la suite, on note  $\chi$  est la courbure et  $\bar{y}$  est la profondeur de l'axe neutre qui est la distance des fibres extrêmes en compression et le point de déformation nulle. Ainsi, le champ de déformation s'écrit  $\varepsilon = \chi y$ .

En flexion pure, les efforts intérieurs s'écrivent :

$$N = \iint \sigma ds = b \int_0^{\bar{y}} E \cdot \chi \cdot y dy + \int_{-\frac{\varepsilon_{d0}}{\chi}}^0 E \cdot \chi \cdot y dy + \int_{-\frac{\varepsilon_{d0}}{\chi}}^{-\frac{\varepsilon_{d0}}{\chi}} [1 - D_t(y)] E \cdot \chi \cdot y dy = 0 \quad (9)$$

$$M = \iint \sigma y ds = b \int_0^{\bar{y}} E \cdot \chi \cdot y^2 dy + \int_{-\frac{\varepsilon_{d0}}{\chi}}^{-\frac{\varepsilon_{d0}}{\chi}} [1 - D_t(y)] E \cdot \chi \cdot y^2 dy \quad (10)$$

La solution du problème posé revient donc à déterminer les inconnus  $\bar{y}$  et  $\chi$  du système d'équation constitué par les équations (6) et (7) obtenues après intégration des équations (9) et (10):

$$\sqrt{N = \frac{1}{2} \bar{y}^2 - \frac{\varepsilon_{d0}^2}{2\chi^2} - \frac{\varepsilon_{d0}(1-A_t)}{\chi} \left[ -\frac{\varepsilon_{d0}}{\chi} + (h - \bar{y}) \right] + \frac{A_t e^{B_t \varepsilon_{d0}}}{B_t \chi} \left[ \left( -\frac{\varepsilon_{d0}}{\chi} - \frac{1}{B_t \chi} \right) e^{-\varepsilon_{d0} B_t} + ((h - \bar{y}) + \frac{1}{B_t \chi}) e^{-B_t \chi (h - \bar{y})} \right]} = 0 \quad (11)$$

$$\sqrt{\frac{M}{bE\chi} = \frac{1}{3} \left[ \bar{y}^3 + \left( \frac{\varepsilon_{d0}}{\chi} \right)^3 \right] - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{d0}}{\chi} (1 - A_t) \left[ \frac{\varepsilon_{d0}^2}{\chi^2} - (h - \bar{y})^2 \right] + \frac{A_t e^{B_t \varepsilon_{d0}}}{B_t \chi^3} \left[ e^{-B_t \varepsilon_{d0}} (B_t^2 \varepsilon_{d0}^2 + 2B_t \varepsilon_{d0} + 2) - e^{B_t \chi (h - \bar{y})} (B_t^2 \chi^2 (\bar{y} - h)^2 - 2B_t \chi (\bar{y} - h) + 2) \right]} \quad (12)$$

Le système est résolu numériquement par une procédure incrémentale et itérative. La procédure est appliquée à partir de la valeur limite de la courbure élastique  $\chi_e = \frac{2\varepsilon_{d0}}{h}$ . A chaque incrément  $\chi = \chi_e + \Delta\chi$ , on cherche la profondeur de l'axe neutre  $\bar{y}$  qui permet d'annuler l'effort normal et on en déduit le moment fléchissant  $M(\chi)$ .

Les résultats de ce calcul analytique sont représentés sur la figure 5 pour les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques du modèle numérique.

## 5. COMPARAISON DES RÉSULTATS

L'objet de cette poutre est de déduire à partir du modèle analytique et de la courbe (figure 5) la relation force-flèche afin de pouvoir comparer ces résultats aux résultats de la modélisation numérique. Le calcul des flèches à partir de la courbe ( $M-\chi$ ) peut être réalisé facilement si les matériaux ont un comportement

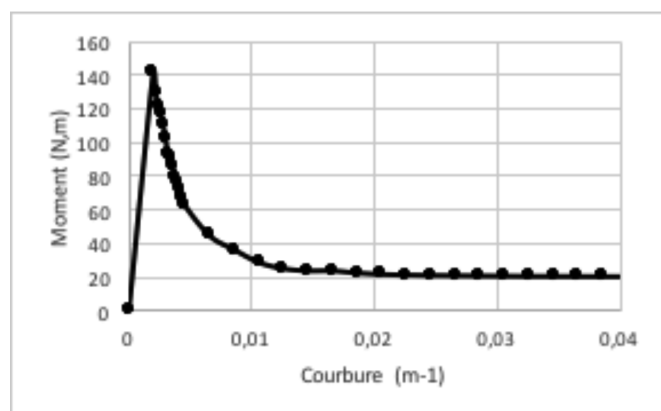


Figure 5. Courbe moment-courbure ( $M-\chi$ ).

élastique linéaire. Toutefois, le comportement non-linéaire du béton provoque des difficultés de calcul.

Dans la partie élastique, l'équation qui régit la déformation de la poutre s'écrit :

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI} = \frac{F \cdot x}{2} \times \frac{1}{EI} \quad (13)$$

Après une double intégration de l'équation (13), on obtient la flèche  $y$  à mi portée tel que :

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L^2}{12} y''\left(\frac{L}{2}\right) \quad (14)$$

Ainsi que le moment fléchissant qui ne dépend pas de la loi du comportement s'écrit :

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL}{4} \quad (15)$$

Concernant la partie post-pic et vu la complexité de l'expression moment en fonction de la courbure (équation 7), on ne peut pas déterminer la flèche par double intégration de la courbure. Pour faciliter les calculs, un modèle simplifié de la poutre après endommagement sera adopté [6]. Elle sera considérée comme est une poutre isotatique avec un seul degré de liberté et une rigidité représentée par un ressort spiral dont le comportement est endommageable (figure 6-b).

Ainsi, en posant  $\theta = 2\alpha$  la discontinuité de la rotation et en s'inspirant de la littérature [6, 7] la courbure peut s'écrire  $y'' = \frac{2\alpha}{a}$  avec  $a = \frac{L}{2}$ .

Par la suite, la relation entre la flèche et la courbure s'écrit :

$$y = \frac{L^2}{8} y'' \quad (16)$$

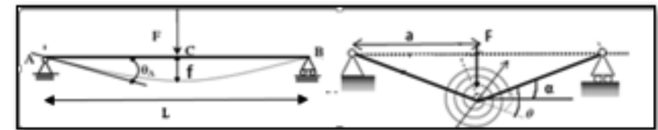


Figure 6. -a-Allure de la flèche en élasticité  
-b-modèle analogique endommagé

La figure 7 présente la superposition du modèle numérique ainsi que le modèle analytique. On constate que les deux modèles ont la même allure mais on remarque que le modèle analytique s'endommage plus vite et arrive à un palier horizontal qui tend à s'annuler. Cependant, ce petit décalage peut être expliqué par la présence du phénomène du poinçonnement situé dans la zone d'application de la force à mi-travée de la poutre.

## 6. CONCLUSIONS

Cette étude a permis de modéliser numériquement une poutre en béton soumise à une flexion trois points en se basant sur le modèle élastique endommageable de Mazars implémenté dans le code éléments finis Cast3M. Par ailleurs, un modèle analytique, basé sur la théorie des poutres, a été établi pour décrire le comportement élastique endommageable du béton. Une extension du modèle analytique pourra être développée dans le futur pour tenir compte des phénomènes de poinçonnement, de localisation des déformations aussi bien de l'effet de la température sur le comportement mécanique du béton.



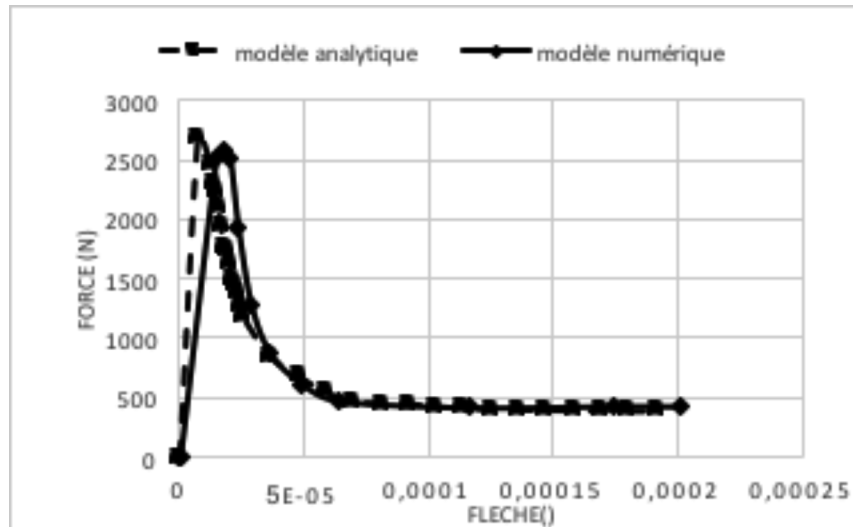


Figure 7. Comparaison des deux modèles analytique et numérique.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Kachanov, L. M., Time of the rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk. SSR. OtdTekh. Nauk*, 8, 26-31, 1958.
- [2] Jean lemaître A, Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Janvier 1985.
- [3] Marina Bottoni, Code\_Aster. Modèle d'endommagement de MAZARS, 2012.
- [4] Pijaudier-Cabot, G., and Bazant, Z. P., "Non local Damage Theory," Report No. 86-8/428n, Center for Concrete and Geomaterials, Northwestern University, Evanston, IL, August, 1986
- [5] Site internet consulté en juin 2016 à l'adresse <http://www-cast3m.cea.fr/index.php>.
- [6] N. Challamel, Creep failure of a simply supported beam through a uniaxial continuum damage mechanics model, 2005.
- [7] N. Challamel, Analytical length scale calibration of non-local continuum from a microstructures buckling model, 2014.

