



JNB'2017
Journées nationales du béton de Tunisie

APPROCHE DE TYPE CALCUL À LA RUPTURE APPLIQUÉE NUMÉRIQUEMENT POUR LA PRÉDICTION DE LA RÉSISTANCE À LA COMPRESSION DES BÉTONS À HAUTES PERFORMANCES

A YIELD DESIGN APPROACH APPLIED NUMERICALLY TO PREDICT HIGH STRENGTH CONCRETE COMPRESSIVE STRENGTH

Ahmed NAIJA⁽¹⁾, Karim MILED⁽²⁾, Oualid LIMAM⁽³⁾

Université de Tunis El Manar, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis,
Laboratoire de Génie Civil. BP 37, Le Belvédère, 1002, Tunis, Tunisie.

⁽¹⁾ najjaahmed31@gmail.com

⁽²⁾ karim.miled@enit.rnu.tn

⁽³⁾ oualid.limam@enit.rnu.tn

1. INTRODUCTION

Les bétons sont des matériaux fortement hétérogènes et ayant un comportement mécanique et une rupture complexes. Ainsi, la prédiction des résistances mécaniques de ces composites cimentaires demeure un sujet d'actualité. En plus des modèles empiriques [1-3], des modèles numériques discrets sont de plus en plus utilisés pour décrire le comportement mécanique des bétons. Deux types d'approche sont généralement adoptés. La première approche remplace le matériau par un ensemble de liaisons mécaniques sans tenir compte de la géométrie de la

microstructure réelle. Les paramètres de chaque liaison sont introduits selon la nature du matériau étudié [4-8], alors que la deuxième approche consiste à générer la microstructure à travers un ensemble de grains interconnectés [9-12]. La mosaïque de Voronoi [13-15] est généralement utilisée pour modéliser l'inter connectivité des particules qui composent la microstructure. Ces modèles discrets sont efficaces pour prédire l'effet de la microstructure sur le comportement mécanique et la rupture des bétons ainsi que la prise en compte des effets de taille et d'échelle. Dans ce contexte, un modèle mécanique discret développé récemment par Miled *et al.* [16] permet de prédire



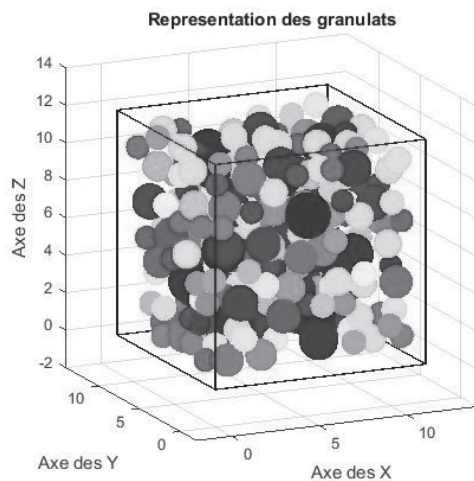


Figure 1. Grains sphériques distribués

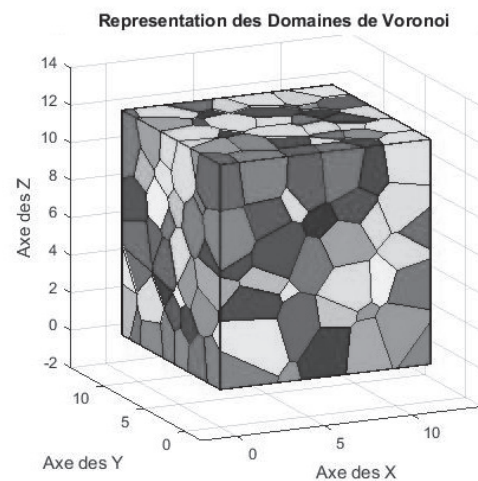


Figure 2. Particules de Voronoi

la résistance en compression simple des bétons ordinaires (BO) et des bétons à hautes performances (BHP) en fonction des caractéristiques mécaniques de leur matrice cimentaire et des caractéristiques géométriques de leur squelette granulaire (volume et compacité granulaires, distribution de taille et diamètre maximal des grains). Ce modèle est analytique et il est basé sur l'homogénéisation statistique d'un milieu discret de type Voronoi formé de granulats sphériques et rigides en interaction dans une matrice cimentaire. Celle-ci obéit à un critère de résistance traduisant un mode de rupture mixte par compression-cisaillement en fonction de l'orientation des granulats par rapport à la direction du chargement macroscopique de compression uniaxiale. Cependant, dans leur modèle, Miled *et al.* [16] vérifient seulement l'équilibre mécanique ultime global de l'éprouvette en béton au moment de sa rupture et s'affranchissent de la vérification de l'équilibre local de tous les grains en interaction dans la pâte cimentaire. En outre et afin de pouvoir conduire leur approche de façon analytique, ces auteurs idéalisent la microstructure réelle du béton en considérant une forme sphérique des grains et en simplifiant la distribution granulométrique. Dans cette étude, la même approche proposée par Miled *et al.* [16] est adoptée pour prédire la résistance à la compression des BHP en fonction de leur microstructure. Cependant, cette approche est conduite numériquement afin de s'affranchir de toutes les simplifications géométriques et de vérifier aussi l'équilibre mécanique local au sein de l'éprouvette en béton au moment de sa rupture en compression simple. Ainsi, cette communication écrite est organisée de la manière suivante : le modèle géométrique est présenté en premier lieu, suivi du modèle mécanique. Enfin, les résultats des simulations sont présentés et confrontés à des résultats expérimentaux issus de la littérature.

2. MODÈLE GÉOMÉTRIQUE

Les bétons objets de cette étude sont des BHP pour lesquels l'aurole de transition entre les granulats et la pâte de ciment est généralement de très faible épaisseur (d'environ $10 \mu\text{m}$) ou voire inexistante, et ce grâce à la présence dans la pâte cimentaire d'additions fines comme la fumée de silice qui comble la

porosité de cette zone de transition [1-3]. Par conséquent, le modèle géométrique adopté pour décrire la microstructure des BHP est un modèle à deux phases ; une première phase constituée de granulats et une deuxième phase constituée de la pâte de ciment enrobant ces granulats. Le modèle numérique développé reproduit une granulométrie réelle choisie par l'utilisateur. La courbe granulométrique et la fraction volumique des granulats étant données, un ensemble de sphères dites sources des granulats, est généré. Ces sphères serviront ensuite à générer des granulats anguleux tels que la répartition de leurs diamètres soit à l'image de la courbe granulométrique réelle considérée. Les sphères sources sont distribuées aléatoirement, selon une loi uniforme, dans une éprouvette cubique, sans qu'il y ait chevauchement entre elles, c'est-à-dire que la distance d'une sphère à une autre doit être supérieure ou égale à la somme de leurs deux rayons. La figure 1 montre ces grains sphériques distribués dans une éprouvette cubique. L'étape suivante du calcul géométrique est la détermination des régions de Voronoi. Une région de Voronoi, ou particule de Voronoi, représente le domaine d'influence d'un noyau. C'est-à-dire que tout point de cette région est plus proche de ce noyau que de tout autre noyau. Ainsi, ce domaine est représenté par un polyèdre convexe dans l'espace et sa détermination consiste à calculer les sommets de ce polyèdre. Un sommet est par définition un point équidistant à 4 grains, il est plus proche de ces grains que de tous les autres. Pour des noyaux sphériques de diamètres différents, les distances sont comparées en termes de distances tangentes. Cette géométrie est appelée géométrie de Laguerre, et les distances sont appelées distances radiales [14-15]. La figure 2 montre les particules de Voronoi simulées pour l'ensemble de sphères sources distribuées. La dernière étape du modèle géométrique consiste à générer les granulats à partir des domaines de Voronoi. En effet, une homothétie est appliquée à chaque sommet de Voronoi de telle façon que le rapport du volume des nouvelles particules sur le volume total de l'éprouvette soit égal à la fraction volumique des granulats. Le centre de l'homothétie est le centre de la sphère source, et le rapport d'homothétie est calculé afin d'avoir une homothétie de volume égale à la fraction volumique des granulats. Les granulats obtenus ainsi, ont des formes polyédriques irrégulières et convexes comme le montre la figure 3.



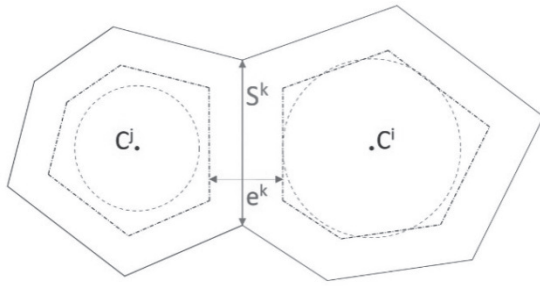


Figure 3. Particules voisines en interaction

3. MODÈLE MÉCANIQUE

Le but étant de déterminer la résistance en compression simple du béton étudié, l'échantillon généré par le modèle géométrique est soumis à un essai de compression simple. Selon un raisonnement de type calcul à la rupture et par une approche par l'intérieur, il s'agit de vérifier, pour un chargement donné, qu'il existe un champ de contraintes statiquement admissible et vérifiant toutes les conditions de résistance du matériau ; ce chargement est considéré alors comme supportable par le béton et peut être vu comme une borne inférieure du chargement ultime. L'objectif du modèle mécanique est donc de maximiser cette borne inférieure pour estimer au mieux ce chargement ultime. Ce calcul est posé sous la forme d'un problème de maximisation de la charge de compression uniaxiale appliquée et notée \mathbf{F} , sous les contraintes d'équilibre des particules et de résistance de la pâte. La résistance des granulats n'est pas prise en compte sous l'hypothèse que la rupture aura lieu seulement dans la pâte de ciment. La détermination des particules de Voronoi, permet d'identifier les granulats en interactions et les interfaces d'interaction, leurs surfaces et les épaisseurs de la pâte de ciment qui sépare les granulats voisins, comme le montre la figure 3. Soit N l'ensemble des granulats distribués dans l'éprouvette. Soit deux particules en interaction i et j appartenant à N et de centre respectivement C^i et C^j . La surface d'interaction est S^k tel que k est le couple (i,j) et l'épaisseur de la pâte séparant ces deux granulats est e^k . Chaque particule de Voronoi est soumise d'une part aux forces d'interaction des particules voisines, et d'autre part au chargement macroscopique, si cette particule est en contact avec la surface de chargement. La force de chargement extérieur appliquée sur la particule i est notée F_e^i et le point d'application de cette force est noté P_e^i . Soit S^{sup} la surface supérieure de chargement :

$$\mathbf{F} = \sum_{i \in S^{\text{sup}}} F_e^i$$

La force appliquée par la particule i sur la particule j est notée F^{ij} ou F^k et le point d'application de cette force est P^{ij} , centre de la surface S^{ij} . La figure 4 montre un granulat soumis aux forces d'interaction appliquées par son voisinage. L'ensemble N^i est défini comme étant l'ensemble des particules en contact avec la particule i . D'après le théorème d'actions mutuelles :

$$\underline{F}^{ij} = -\underline{F}^{ji} \quad i \in N, \forall j \in N^i$$

L'équilibre statique d'une particule est vérifié si la somme des tenseurs des efforts extérieurs qui lui sont appliqués est égale à zéro. L'équilibre global de l'éprouvette est donc vérifié si l'équilibre local de chaque élément l'est aussi.

Le critère de résistance microscopique est écrit pour chaque interface comme étant un critère de rupture en compression-cisaillement de la pâte de ciment comprise entre deux granulats. Le même critère de résistance microscopique proposé par Miled *et al.* [16] a été utilisé dans cette étude numérique. Ce critère est fonction de la résistance en compression de la pâte notée f_{cp} , affectée d'un effet d'échelle de volume :

$$f_{cp}(e^k) = f_{cp}(L_0) * \left(\frac{e^k}{L_0}\right)^{-\alpha}$$

Avec $\alpha > 0$ et L_0 est la taille de l'échantillon au-delà de laquelle l'effet d'échelle de volume n'est plus important [16]. Le critère est écrit en fonction des contraintes de compression et de cisaillement notées respectivement pour un couple k , σ_N^k et τ^k . Chaque force d'interaction est donc décomposée dans le repère local de son interface (Figure 5), en une composante normale et deux composantes tangentielles. Pour une interface donnée, le vecteur normal est noté \underline{n}^k et les deux vecteurs tangentiels sont notés \underline{t}_1^k et \underline{t}_2^k . La force d'interaction s'écrit dans son repère local comme suit :

$$\underline{F}^k = F n^k * \underline{n}^k + F t_1^k * \underline{t}_1^k + F t_2^k * \underline{t}_2^k$$

Les contraintes moyennes de compression et de cisaillement s'écrivent ainsi :

$$\sigma_N^k = \frac{|F n^k|}{S^k} \quad \text{et} \quad \tau^k = \frac{\sqrt{F t_1^k{}^2 + F t_2^k{}^2}}{S^k}$$

Le critère de résistance microscopique s'écrit, pour une interface séparant le couple k des grains voisins, sous la forme suivante [16] :

$$\sigma_N^k \left(1 + \left(\frac{\tau^k}{\sigma_N^k}\right)^2\right)^2 \leq f_{cp}(e^k)$$

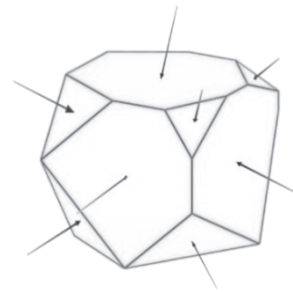


Figure 4. Granulat soumis aux forces d'interaction

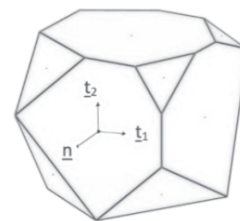


Figure 5. Repère local pour une interface



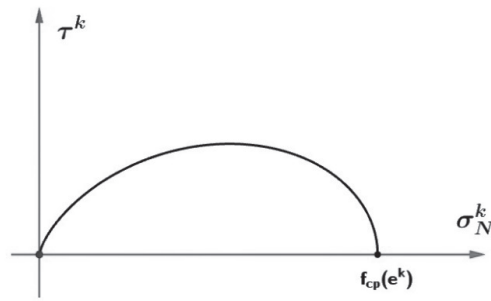


Figure 6. Critère de rupture dans le plan (σ_N^k, τ^k)

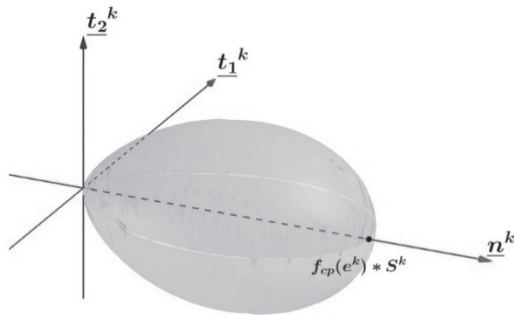


Figure 7. Critère de rupture dans le plan (n^k, t_1^k, t_2^k)

Les figures suivantes représentent ce critère de résistance microscopique du béton, respectivement dans les plans (σ_N^k, τ^k) et (n^k, t_1^k, t_2^k) .

Enfin, la résistance en compression simple du béton correspond à la contrainte macroscopique uniaxiale maximale pour laquelle l'équilibre de chaque particule est vérifié et le critère de résistance de chaque interface est respecté. Ce problème de maximisation est résolu à l'aide du solveur commercial MOSEK.

4. RÉSULTATS ET VALIDATION DU MODÈLE

Le modèle numérique génère un très grand nombre de granulats. Ceci pose un problème du point de vue temps de calcul, pour la détermination des régions de Voronoi ainsi que pour la convergence du problème mécanique. Le nombre de granulats a été donc limité à une valeur fixe ce qui permet un temps de calcul raisonnable et la convergence du calcul. Deux

simplifications ont donc été appliquées. La première consiste à diviser la granulométrie du béton en deux parties à l'aide d'un diamètre de coupure. Ce diamètre est fixé pour toutes les simulations à d_{50} , c'est-à-dire le diamètre pour lequel 50 % en volume des grains ont des diamètres plus grands que d_{50} . Cette simplification est due au fait que le nombre de grains de sable est beaucoup plus important dans le béton que le nombre de grains de gravier. Cette division permet de calculer en premier temps la résistance en compression du mortier à base de granulats de diamètres inférieurs au diamètre de coupure. Ce mortier est ensuite pris comme pâte dans le calcul de la résistance du béton. Ce béton est alors formé du reste des granulats et du mortier considéré homogène. La deuxième simplification consiste à considérer, non pas un volume élémentaire représentatif suffisamment grand mais plusieurs petits volumes élémentaires. Leurs tailles sont déterminées de façon à satisfaire une fraction volumique des granulats donnée pour un nombre fixé de granulats générés. Cette simplification se base sur l'hypothèse d'ergodicité du béton qui stipule que la moyenne statistique des résultats de simulations sur plusieurs volumes élémentaires est égale au résultat d'une seule simulation conduite sur un volume représentatif du béton suffisamment grand. Enfin, moyennant ces deux simplifications, ce modèle a été testé sur 5 granulométries différentes de bétons à hautes performances confectionnés par de Larrard [1]. Les granulats sont issus de deux types de roche ayant des résistances à la compression différentes (voir Tableau 1). Ces mêmes résultats expérimentaux ont été utilisés par Miled *et al.* [16] pour la validation de leur modèle analytique. Les résultats de ces simulations ainsi que la comparaison avec les résultats expérimentaux de de Larrard [1] sont présentés dans le tableau suivant.

5. CONCLUSION

D'après les résultats obtenus, nous pouvons conclure que le modèle numérique développé représente bien la microstructure du béton, car il génère une granulométrie à l'image de la granulométrie réelle. D'autre part, il donne une approximation assez satisfaisante des résistances en compression simple des BHP, pour des temps de calcul relativement acceptables. Cependant, le modèle numérique proposé doit être validé davantage en confrontant ses prédictions avec d'autres résultats expérimentaux relatifs à d'autres BHP.

Tableau 1. Résultats des simulations et comparaison avec les résultats expérimentaux

Granulométrie	C1 (Mortier)	C2 (micro-Béton)	C3 (Béton)	C4 (Mortier)	C5 (Béton)
$f_{c-roche}$ (MPa)	285	285	285	250	250
g	0,579	0,711	0,719	0,548	0,651
D_{max} (mm)	6,3	16	25	6.3	25
f_{c28} (expérimentale) (MPa)	106,5	90,5	86,8	104,9	90,9
f_{c28} (numérique) (MPa)	107	90,7	87,6	96,7	86,9





RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] F. de Larrard, Structures granulaires et formulation des bétons, vol. OA34, France, 2000.
- [2] F. de Larrard, P. Tondat, Sur la contribution de la topologie du squelette granulaire à la résistance en compression du béton, *Materials and Structures* 26 (1993) 505-516.
- [3] A. Neville, Properties of concrete. London, 1981.
- [4] M. Jirásek, Z. Bazant, Macroscopic fracture characteristics of random particle systems, *International Journal of Fracture* 69 (1995) 201-228.
- [5] E. Schlagen, E. Garboczi, New method for simulating fracture using an elastically uniform random geometry lattice, *International Journal of Engineering Science* 34 (10) (1996) 1131-1144.
- [6] F. Camborde, C. Mariotti, F.V. Donzé, Numerical study of rock and concrete behaviour by discrete element modeling, *Computers and Geotechnics* 27(4) (2000) 225-247.
- [7] G. Jefferson, G. Haritos, R. Mc Meeking, The elastic response of a cohesive aggregate: a discrete element model with coupled particle interaction, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50 (2002) 2539-2575.
- [8] R. Ince, A. Arslan, B. Karihaloo, Lattice modelling of size effect in concrete strength, *Engineering Fracture Mechanics* 70 (16) (2003) 2307-2320.
- [9] Z.P. Bazant, M.R. Tabarra, M.T. Kazemi, G. Pijaudier-Cabot, Random particle model for fracture of aggregate or fiber composites, *Journal of the Engineering Mechanics* 116 (8) (1990) 1686-1705.
- [10] J.E. Bolander, S. Saito, Fracture analysis using spring networks with random geometry, *Engineering Fracture Mechanics* 61 (1998) 569-591.
- [11] S. Torquato, Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties, in: *Interdisciplinary Applied Mathematics*, vol. 16, Springer-Verlag New York, Inc., 2002.
- [12] G. Cusatis, Z. Bazant, F. ASCE, L. Cedolin, M. ASCE, Confinement-shear lattice model for concrete damage in tension and compression: I. Theory, *Journal of Engineering Mechanics* 129 (12) (2003) 1439-1448.
- [13] H. Imai, M. Iri, and K. Murota, Voronoi Diagram in the Laguerre Geometry and Its Applications, *SIAM Journal on Computing*, V. 14 (1985), 93-105.
- [14] Zh. Fan, Yu. Wu, X. Zhao, and Yu. Lu, Simulation of polycrystalline structure with Voronoi diagram in Laguerre geometry based on random closed packing of spheres, *Computational Materials Science*, V. 29 (2004), 301-308.
- [15] A. Lachihab, K. Sab, Aggregate composites: a contact based modelling, *Computational Materials Science* 33 (4) (2005) 467-490.
- [16] K. Miled, O. limam, K Sab, A probabilistic mechanical model for prediction of aggregates' size distribution effect on concrete compressive strength, *Physica A* 391 (2012) 3366-3378.

