

COMMENT UNE POUTRE PEUT-ELLE CASSER ?

Noël CHALLAMEL*, Christophe LANOS, Charles CASANDJIAN***

*LGCGM – INSA de Rennes, 20, avenue des Buttes de Coësmes, 35043 Rennes Cedex – France

**LGCGM – IUT de Rennes, 3, rue du clos Courtel, 35704 Rennes Cedex – France

1. INTRODUCTION

Cet article porte sur la modélisation du processus de rupture d'une poutre en béton armé par un modèle de plasticité non locale. Les modèles de plasticité ou d'endommagement non locaux ont été utilisés avec succès dans les années 80 pour contrôler la localisation des structures composées de matériaux radoucissants (Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987). Pour ces modèles, le caractère non local de la loi constitutive, généralement introduit à partir d'une longueur caractéristique, est restreint à la fonction de charge (d'endommagement ou de plasticité). Cette théorie a l'avantage de ne pas affecter la nature locale du comportement élastique. On distingue généralement les modèles de plasticité au gradient explicite ou implicite, en fonction de l'aptitude à définir explicitement ou implicitement la variable non locale en fonction de la variable locale. Malgré le nombre important d'articles consacrés à ces modèles non locaux radoucissants (Jirásek et Bažant, 2002), peu d'études ont été consacrées à la modélisation du comportement élastoplastique non local de la poutre en variables généralisées (loi moment-courbure – voir par exemple Bažant et Zubelewicz, 1988, ou Challamel, 2003). Historiquement pourtant, les relations moment-courbure avec branche radoucissante ont été introduites dans le cadre de la modélisation des poutres en béton armé (Wood, 1968). Wood (1968) montra l'impossibilité pour la poutre élastoplastique de s'écouler, un phénomène parfois

appelé le paradoxe de Wood (voir aussi Bažant, 1976; Royer-Carfagni, 2001 ou Challamel et Hjjaj, 2005). Nous montrons dans cet article qu'un modèle de plasticité au gradient implicite (équivalent à un modèle non-local intégral de plasticité) permet de résoudre le paradoxe de Wood pour la poutre console, avec phase d'écrouissage préalable. Ce modèle permet de prendre en compte les effets d'échelle associés aux phénomènes de fissuration.

2. LA POUTRE CONSOLE – LE PARADOXE DE WOOD

On considère une poutre console homogène de longueur L et chargée par une force verticale P à son extrémité (Figure 1). On reconnaît la poutre console étudiée par Galilée à partir d'arguments portant sur l'équilibre et la résistance des éléments constituants (Galilée, 1638 – voir aussi l'analyse historique de Timoshenko, 1983 ou Salençon, 1990 à ce propos). Cette poutre console peut être assimilée à un paradigme structurel, c'est-à-dire un système structurel élémentaire qui possède un gradient de contraintes généralisées (ici le moment). La poutre est supposée ne pas se déverser (voir les articles récents de Challamel, 2007 et Challamel *et al*, 2007 pour la modélisation de poutres consoles au déversement). La flèche de la poutre est notée $w(x)$. On choisit de modéliser le comportement inélastique

de la poutre en variables généralisées moment M – courbure χ (avec $\chi = w''$).

Le problème étant isostatique, les équations de l'équilibre aboutissent directement à l'évolution du moment de flexion dans la poutre :

$$M(x) = P(L - x) \quad \text{with } P \geq 0 \quad \text{and } x \in [0; L] \quad [1]$$

Le processus de rupture est contrôlé par le déplacement v de l'extrémité de la poutre $v = w(L)$. (voir Figure 2)

La loi moment-courbure (M, χ) est d'abord considérée avec un comportement local élastoplastique écrouissable puis radoucissant (avec des lois d'écrouissage linéaires). La fonction de charge f est donnée par :

$$f(M, M^*) = |M| - (M_p + M^*) \quad \text{et} \quad M = EI(\chi - \chi_p) \quad [2]$$

avec M_p le moment plastique, et M^* une variable de moment additionnelle qui dépend de la courbure plastique χ_p .

$$\begin{cases} M^*(\chi_p) = k^+ \chi_p & \text{if } \chi_p \in [0; \kappa_c] \\ M^*(\chi_p) = \langle k^-(\chi_p - \kappa_c) + m M_p \rangle - M_p & \text{if } \chi_p \notin [0; \kappa_c] \end{cases}$$

$$\text{avec } \kappa_c = (m - 1) \frac{M_p}{k^+} \quad [3]$$

k^+ est le module d'écrouissage positif, k^- est le module de radoucissement, négatif, m , nécessairement supérieur à l'unité, est le rapport entre le moment maximum atteint durant la phase d'écrouissage et le moment plastique M_p . Le moment de flexion est maximum au niveau de l'encastrement ($x = 0$). Le processus élastoplastique est alors déclenché, dès lors que le moment de flexion atteint la valeur du moment plastique. Le déplacement élastique maximum v_Y et la charge correspondante P_Y sont données par :

$$v_Y = \frac{M_p L^2}{3EI} \quad \text{et} \quad P_Y = \frac{M_p}{L} \quad [4]$$

Tant que le déplacement v est plus petit que v_Y , la poutre garde un comportement élastique, et la déformée est obtenue à partir de la solution élastique :

$$v \leq v_Y \Rightarrow EI w(x) = -\frac{P}{6} x^3 + PL \frac{x^2}{2} \quad \text{avec } P = 3 \frac{EI}{L^3} v \quad [5]$$

Au delà de cette valeur caractéristique v_Y ($v \geq v_Y$), le régime plastique commence, et la poutre peut être subdivisée en deux domaines, un domaine élastique et un domaine plastique de taille l_0^+ (voir Figure 2). Les équations [1], [2] et [5] donnent l'évolution de la courbure plastique :

$$x \in [0; l_0^+]: \quad \chi_p(x) = \frac{P(L - x) - M_p}{k^+} \quad [6]$$

En imposant à la fonction χ_p d'être une fonction continue de x ($\chi_p(l_0^+) = 0$), la longueur de la zone plastique est régie par le système :

$$\chi_p(l_0^+) = 0 \Rightarrow \frac{l_0^+}{L} = 1 - \frac{P_Y}{P} \quad [7]$$

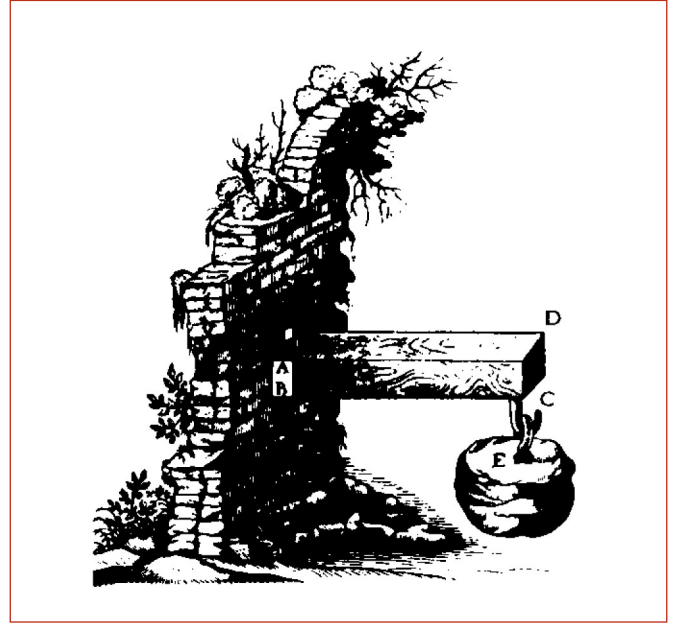


Figure 1. La poutre console (figure extraite de Galilée, 1638).

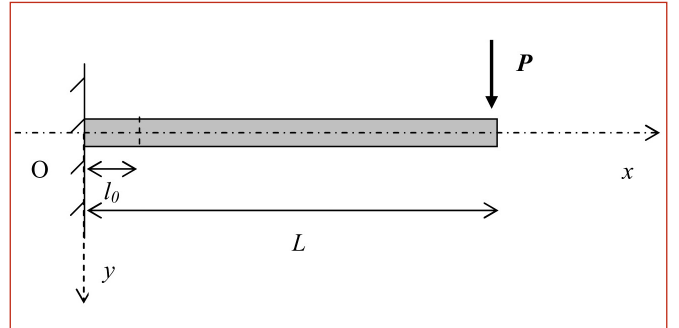


Figure 2. Poutre console – schéma structurel.

La phase radoucissante peut s'initier dès lors que la charge P atteint sa valeur maximale mP_Y . En imposant de nouveau à la courbure plastique d'être une fonction continue de x ($\chi_p(l_0^-) = \kappa_c$), on tombe sur la paradoxe de Wood :

$$\begin{cases} P(L - l_0^-) = m M_p \\ PL \leq m M_p \end{cases} \Rightarrow l_0^- = 0 \quad [8]$$

Cette dernière hypothèse induit le paradoxe de Wood pour le comportement avec écrouissage positif et négatif local (généralisation du paradoxe de Wood avec radoucissement local sans phase d'écrouissage préliminaire) : seule la solution de décharge élastique est possible pour le problème radoucissant local. Un modèle de plasticité non-locale est développé dans cet article pour résoudre ce paradoxe.

3. LE PARADOXE DE WOOD RÉSOLU – UN MODÈLE DE PLASTICITÉ NON-LOCAL

Un modèle de plasticité au gradient implicite est développé dans cet article. Ce modèle est équivalent à un modèle de plasticité intégral. Pour le modèle de plasticité au gradient

implicite (Engelen et al, 2003 ; Peerlings, 2007), la variable M^* dans la phase de radoucissement, est fonction de la courbure plastique non-locale, à partir du modèle bilinéaire :

$$\begin{cases} M^*(\chi_p) = k^+ \chi_p \text{ if } \chi_p \in [0; \kappa_c] \\ M^*(\chi_p) = \langle k^-(\tilde{\chi}_p - \kappa_c) + mM_p \rangle - M_p \text{ if } \chi_p \notin [0; \kappa_c] \end{cases} \quad [9]$$

La courbure non-locale $\tilde{\chi}_p$ est une combinaison de variables locale et non-locale, comme initialement proposé par Vermeer et Brinkgreve (1994) pour des modèles intégraux :

$$\tilde{\chi}_p = (1-p)\chi_p + p\overline{\chi}_p \quad [10]$$

p est un paramètre adimensionnel. Pour le modèle de plasticité au gradient implicite étudié dans cet article (Engelen et al, 2003 ; Peerlings, 2007), la courbure plastique non-locale $\overline{\chi}_p$ est définie à partir de l'équation de Helmholtz :

$$\overline{\chi}_p - l_c^2 \overline{\chi}_p'' = \chi_p \quad [11]$$

Une longueur caractéristique l_c est introduite dans la définition de la courbure plastique non-locale. Cette équation différentielle clairement signifie que la courbure plastique non-locale s'obtient à partir d'une moyenne spatiale de la courbure plastique locale (voir Eringen 1983 en élasticité non-locale) :

$$\overline{\chi}_p(x) = \int_0^{l_0} G(x, y) \chi_p(y) dy \quad [12]$$

où la fonction $G(x, y)$ est la fonction de Green de l'équation différentielle Eq. (11) associée à des conditions aux limites pertinentes. On se restreint dans cet article, au cas particulier $p = 2$ (voir Challamel, 2008) :

$$p = 2 \Rightarrow \tilde{\chi}_p = \overline{\chi}_p + l_c^2 \overline{\chi}_p'' \quad [13]$$

Les conditions aux limites sont données par (voir Challamel et al, 2008 ; Challamel, 2008 pour le problème sans écrouissage préliminaire) :

$$\chi_p(l_0) = \kappa_c, \quad \overline{\chi}_p'(l_0) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\chi}_p'(0) = 0 \quad [14]$$

Ces conditions aux limites peuvent découler d'une approche variationnelle (Challamel et al, 2008). Une différence importante avec le modèle de plasticité au gradient implicite présenté par Engelen et al (2003) ou Peerlings (2007) tient au fait que les conditions aux limites présentées en [14] portent sur le domaine plastique, et non sur le domaine global matérialisé par toute la poutre console dans notre problème. Un résultat analogue a été obtenu en théorie de l'endommagement non-local (Challamel et al, 2008). Le système est maintenant résolu pour la courbure plastique non-locale :

$$x \in [0; l_0^-]: \quad \overline{\chi}_p + l_c^2 \overline{\chi}_p'' = \frac{P(L-x) - mM_p}{k^-} + \kappa_c \quad [15]$$

dont la solution générale s'exprime ci-dessous :

$$x \in [0; l_0^-]: \quad \overline{\chi}_p(x) = A \cos \frac{x}{l_c} + B \sin \frac{x}{l_c} + \frac{P(L-x) - mM_p}{k^-} + \kappa_c \quad [16]$$

Le système non-linéaire de 3 équations à 3 inconnues A, B et l_0 est obtenu à partir des conditions aux limites :

$$\begin{cases} 2A \cos \frac{l_0^-}{l_c} + 2B \sin \frac{l_0^-}{l_c} + \frac{P(L-l_0^-) - mM_p}{k^-} = 0 \\ -\frac{A}{l_c} \sin \frac{l_0^-}{l_c} + \frac{B}{l_c} \cos \frac{l_0^-}{l_c} - \frac{P}{k^-} = 0 \\ \frac{B}{l_c} - \frac{P}{k^-} = 0 \end{cases} \quad [17]$$

Les paramètres adimensionnels suivants peuvent être introduits :

$$\beta = \left(1 - m \frac{P_Y}{P}\right) \frac{L}{l_c} \leq 0 \quad \text{et} \quad \xi = \frac{l_0^-}{l_c} \geq 0 \quad [18]$$

et la relation charge-zone plastique s'écrit finalement :

$$\beta = \xi - 2 \frac{1 - \cos \xi}{\sin \xi} \quad [19]$$

Le paramètre de chargement $|\beta|$ varie entre et tend vers une valeur infinie lorsque P tend vers zéro (la taille de la zone plastique tend alors vers $\xi_0 = \pi$). L'identification de cette taille de zone plastique localisée est à relier à la notion de longueur finie de rotule ou à la zone finie du processus de rupture (Fracture Process Zone souvent notée FPZ en anglais). En théorie des poutres, il a été expérimentalement prouvé que cette zone dépendait de la hauteur de section de la poutre (Wood, 1968 ; Bazant, 1976 ; Bazant et al, 1987).

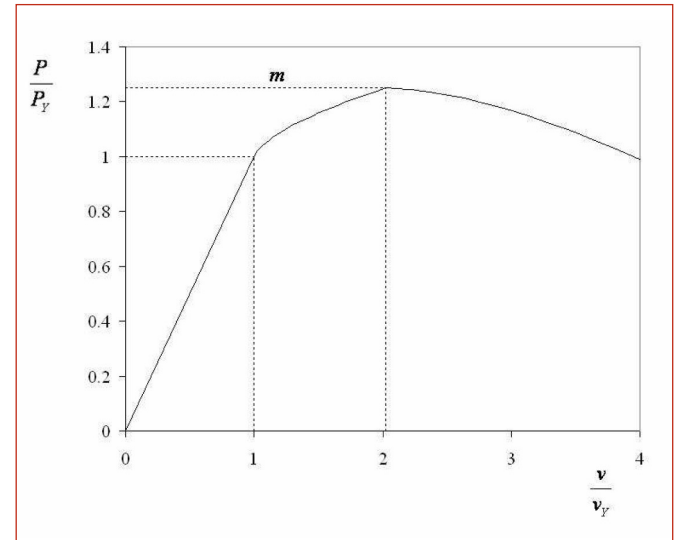


Figure 3. Evolution de la charge en fonction du déplacement à l'extrémité de la poutre;

$$\frac{EI}{k} = -5; \quad \frac{l_c}{L} = 0.1; \quad m = \frac{5}{4}; \quad \frac{EI}{k^+} = 11$$

La réponse de la poutre radoucissante est unique et le paradoxe de Wood est clairement résolu avec ce modèle de plasticité non-locale (Figure 3). Notons que le même problème sans gradient de moment ne conduit pas à l'unicité du problème d'évolution (un phénomène similaire à celui qu'analysent Benallal et Marigo, 2007). Il est remarquable

que la zone plastique évolue au cours du processus de radoucissement.

Un tel phénomène avait déjà été modélisé par Pijaudier-Cabot et al (2004) dans le cadre de la théorie de l'endommagement non-local, ou par Voyiadjis et Abu Al-Rub (2005) pour la plasticité non-locale, par une dépendance de la longueur caractéristique aux variables du problème. Ce phénomène peut aussi être observé en présence de gradient de contraintes avec le modèle de plasticité non-locale retenu dans cet article. L'effet d'échelle peut être bien décrit avec une telle analyse non-locale, et la ductilité apparente augmente avec la longueur caractéristique.

4. CONCLUSIONS

Cet article porte sur la modélisation du processus de rupture d'une poutre en béton armé par un modèle de plasticité non locale. Nous montrons dans cet article qu'un modèle de plasticité au gradient implicite (ou modèle non-local intégral) permet de résoudre le paradoxe de Wood pour la poutre console et la poutre sur deux appuis. Ce modèle permet de prendre en compte les effets d'échelle associés aux phénomènes de fissuration. La ductilité globale est une fonction croissante de la longueur caractéristique du modèle non-local, dont l'évaluation reste un enjeu structurel majeur.

Les effets d'échelle observés en génie civil, à l'échelle de l'ouvrage, peuvent se rencontrer à des échelles bien moindres, on pense en particulier aux micro- et aux nano-structures. Les modèles de poutres développés dans les deux cas peuvent avoir certaines analogies (Challamel et Wang, 2008). Une extension d'une telle méthodologie non-locale pourrait donc porter sur le couplage d'une non-localité élastique avec une non-localité plastique à l'échelle de la poutre.

5. BIBLIOGRAPHIE

Bažant Z.P., « Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete », *J. Eng. Mech.*, ASCE, vol. 102, 1976, p. 331-344.

Bažant Z.P., Pijaudier-Cabot G., Pan J., « Ductility, snap-back, size effect, and redistribution in softening beams or frames », *J. Struct. Eng.*, vol. 113, n°12, 1987, p. 2348-2364.

Bažant Z.P., Zubelewicz A., « Strain-softening bar and beam: exact non-local solution », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 24, n°7, 1988, p. 659-673.

Benallal A., Marigo J.J., « Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening », *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 15, 2007, p. 283-295.

Challamel N., « Une approche de plasticité au gradient en construction métallique », *Comptes-Rendus de Mécanique*, vol. 331, n°9, 2003, p. 647-654.

Challamel N., Hjiab M., « Non-local behavior of plastic softening beams », *Acta Mechanica*, vol. 178, 2005, p. 125-146.

Challamel N., « Lateral-torsional buckling of beams under combined loading – a reappraisal of the Papkovitch-Schaefer theorem », *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 7, n°1, 2007, p. 55-79.

Challamel N., Andrade A., Camotim D., « An analytical study on the lateral-torsional buckling of linearly tapered cantilever strip beams », *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 7, n°3, 2007, p. 441-456.

Challamel N., Wang C.M., « The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved », *Nanotechnology*, vol. 19, 345703, 2008.

Challamel N., Lanos C., Casandjian C., « Plastic failure of nonlocal beams », *Phys. Rev. E*, vol. 78, 026604, 2008.

Challamel N., « A regularization study of some ill-posed gradient plasticity softening beam problems », *J. Eng. Math*, 62, 373-387, 2008.

Challamel N., Lanos C., Casandjian C., « Some closed-form solutions to simple beam problems using non-local (gradient) damage theory », *Int. J. Damage Mech.*, in Press, 2009.

de Borst R., Mühlhaus H.B., « Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects », *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 35, 1992, p. 521-539.

Engelen R.A.B., Geers M.G.D., Baaijens F.P.T., « Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviour », *International Journal of Plasticity*, vol. 19, 2003, p. 403-433.

Eringen A.C., « On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves », *J. Appl. Phys.*, vol. 54, 1983, p. 4703-4710.

Galileo, Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno à due nuove Scienze, 1638, In: Sur les épaules des géants – les plus grands textes de physique et d'astronomie (Hawkins, S.), 154-182, Dunod, 2002.

Jirásek M., Bažant Z.P., *Inelastic analysis of structures*, Wiley, 2002.

Peerlings R.H.J., « On the role of moving elastic-plastic boundaries in strain gradient plasticity », *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 15, 2007, p. 109-120.

Pijaudier-Cabot G., Bažant Z.P., « Nonlocal damage theory », *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 113, 1987, p. 1512-1533.

Pijaudier-Cabot G., Haidar K., Dubé J.F., « Non-local damage model with evolving internal length », *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, 2004, p. 633-652.

Royer-Carfagni G., « Can a moment-curvature relationship describe the flexion of softening beams », *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 20, 2001, p. 253-276.

- Salençon J., « An introduction to the yield design theory and its application to soil mechanics », *Eur. J. Mech. A/Solids.*, vol. 9, n°5, 1990, p. 477-500.
- Timoshenko S.P., *History of strength of materials*, Dover Publications, 1983.
- Vermeer P.A., Brinkgreve R.B.J., « A new effective non-local strain measure for softening plasticity », in: R. Chambon, J. Desrues and I. Vardoulakis, 89-100, Rotterdam, 1994, Balkema, 1994.
- Voyiadjis G.Z., Abu Al-Rub R.K., « Gradient plasticity theory with a variable length scale parameter », *Int. J. Solids Structures*, vol. 42, n°14, 2005, p. 3998-4029.
- Wood R.H., Some controversial and curious developments in the plastic theory of structures. In: *Engineering Plasticity* (Heyman, J., Leckie, F.A.), Cambridge University Press, UK, 665-691, 1968.

RESPONSABILITÉ & ENVIRONNEMENT

recherches débats actions



FAIRE FACE À L'INCERTITUDE

ÉDITORIAL – *Pierre COUVEINHES*

AVANT-PROPOS

L'homme en quête de certitudes : entre croyance et savoir –
Marie-Josèphe CARRIEU-COSTA

I – Quelques aspects théoriques sur l'incertitude

Penser les événements extrêmes – *Jean-Pierre DUPUY*

Quelques éléments de réflexion sur l'incertitude à travers l'histoire des sciences et des idées – *Alexandre MOATTI*

Probabilité et incertitude – *Mme Dominique DEPRINS*

Le concept de risque et son évolution – *Gilles MOTET*

II – L'incertitude : un facteur omniprésent

Quid de la gestion des risques après la constitutionnalisation du principe de précaution ? – *Olivier GODARD*

L'investissement de défense face à l'incertitude – *Carl TRÉMOUREUX*

Les risques chimiques et leur gestion – *Armand LATTES*

Œuvrer dans l'incertitude – *Pierre-Michel MENER*

III – Quelle démarche adopter, face à l'incertitude ?

L'incertitude en matière de technologie – *Sven Ove HANSSON*

De l'incertitude-obstacle à l'incertitude productive, ou comment traiter les risques potentiels des nano-objets ? –
Brice LAURENT

De l'incertitude à la précaution : le rôle de la métrologie –
Jean-Luc LAURENT et Benoît GAUMONT

Risque et prospective – *Thierry GAUDIN*

*Ce numéro a été coordonné
par Marie-Josèphe CARRIEU-COSTA*

BULLETIN DE COMMANDE

A retourner aux Éditions ESKA, 12, rue du Quatre-Septembre, 75002 PARIS

Tél. : 01 42 86 55 73 - Fax : 01 42 60 45 35 - <http://www.eska.fr>

☐ Je désire recevoir exemplaire(s) du numéro de **Responsabilité & Environnement** janvier 2010 - numéro 57 (ISBN 978-2-7472-1636-4) au prix unitaire de 23 € TTC.

Je joins ☐ un chèque bancaire à l'ordre des Éditions ESKA

☐ un virement postal aux Éditions ESKA CCP PARIS 1667-494-Z

Nom Prénom

Adresse

Code postal Ville